

# 日本における資産価格決定モデルの実証分析 ～エクイティプレミアムを指標とした検証～

藤井陽一郎\*

平成 25 年 3 月 5 日

## 概要

資産の価格決定メカニズムについて、Lucas (1978) は代表的個人を用いたツリーエコノミーを提案した。このツリーエコノミーについては、Mehra and Prescott (1985) によりエクイティプレミアム・パズル (the equity premium puzzle) が指摘されており、経済学における未解決問題の 1 つに挙げられている。ところで、先行研究の多くがアメリカの市場データを用いた議論である。一方で、日本のデータを使った検証では、パズルの有無について見解が分かれていると考えられる。そこで、本論文では日本の長期にわたる資産市場データから、日本においてもエクイティプレミアム・パズルが発生していることを明らかにする。

## 1 はじめに

資産の価格がどのように決定されるかを明らかにすることは、金融経済学において大きな目標の 1 つである。Lucas (1978) は、資産の価格決定についてツリーエコノミーを提案した。このツリーエコノミーでは、完全競争市場に参加するすべての個人が同一の選好を持つとし、この個人のことを代表的個人と呼んでいる。さらに、この個人は無限期間にわたって生きるとしている。このモデルでは、市場にある複数の資産が単一の消費財を生産し、資産の株式所有者に生産された消費財を配当として分配すると仮定している。そして、各資産の生産量からなる生産量ベクトルの推移がマルコフ過程に従うとして、均衡における各資産の価格を成分とする価格ベクトルの決定を議論している。このモデル化により、Lucas は純粋交換経済における一般均衡解が解析的に表現できることを示した。

しかし、このツリーエコノミーについては、Mehra and Prescott (1985) によりエクイティプレミアム・パズル (the equity premium puzzle) が指摘されている。Mehra and Prescott は、ツリーエコノミー内の資産を 1 危険資産・1 安全資産とし、生産量の変動率を導入している。さらに、個人の効用関数を相対的危険回避度一定 (CRRA) と仮定している。そして、変動率の統計量が実際のアメリカにおける消費データと一致するように各パラメータを推定し、危険資産の期待収益率と安全資産の収益率の差から定義されるエクイティプレミアムを算出した。この結果、モデルが

---

\*大阪産業大学経済学部  
E-mail:fujii@eco.osaka-sandai.ac.jp

ら推定された値と実際に観察された値の間に乖離があることを明らかにした。この乖離がエクイティプレミアム・パズルである。

このパズルにたいして、四半世紀以上にわたって多くのアプローチが試みられているが、依然として解決に至っていない。ところで、先行研究ではその多くがアメリカの市場データを用いて議論がなされている。一方で、日本のデータを使った検証では、パズルの有無について見解が分かれていると考えられる。Hamori (1992a,b) と羽森 (1996) は、ツリーエコノミーと日本のデータは当てはまりがよいことを示している。つまり、上の日本のデータを用いた分析の結果、日本ではエクイティプレミアム・パズルは起きていないと考えられる。一方で、福田 (1993)、Nakano and Saito (1998) は日本のデータを使った分析でもアメリカの場合と同様に、モデルとデータの当てはまりがよくないことを指摘している。この結果から、日本においてもアメリカと同様にパズルが起きているとしており、日本におけるエクイティプレミアム・パズルの有無について意見の一致が得られているとは言えない。

さらに、分析に使用されるデータの期間についても、アメリカのデータを使ったものと日本のデータを使ったものでは、その長さに大きな隔りがある。すなわち、アメリカのデータを使った分析では、長いもので半世紀以上にわたるデータを使用しているが、日本の場合にはその多くが10年程度のデータにより分析がなされている。個人が将来の配当予測を過去の観察にもとづいておこなっているとすると、長期にわたるデータの観察が必要となる。日本におけるエクイティプレミアム・パズルの有無を検証するには、先行研究よりも長期のデータを使用する必要があると考えられる。また同じ期間のアメリカのデータを使ってエクイティプレミアムを推定し、アメリカにおいてもエクイティプレミアム・パズルが起きているかどうかを確認する必要がある。

そこで本研究では、1956年から2003年の50年近いデータを使い、日本とアメリカでエクイティプレミアム・パズルが起きているかどうかを検証する。結果として、ツリーエコノミーから推定されたエクイティプレミアムとその観測値との間には乖離があることを明らかにする。これにより、半世紀近いデータを使ったときには、日本とアメリカにおいてエクイティプレミアム・パズルが発生していることを示す。

## 2 ルーカスのツリーエコノミーとエクイティプレミアム・パズル

### 2.1 ツリーエコノミー

ここでは、Lucas (1978) の提案したツリーエコノミーをみていく。以下ではツリーエコノミーをLucasモデルと呼ぶことにする。

Lucasモデルでは、市場を代表する個人の存在を仮定し、この個人のことを代表的個人と呼んでいる。この個人は完全競争の下で  $t = 0, \dots, \infty$  の無限期間生きると仮定している。個人は各期の消費から効用を得ており、生涯効用として各期の消費を効用関数により評価し、それを時間選好率で割り引いた総和であるとしている。このような生涯効用の設定を時間加法的な生涯効用と呼び、

$$E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(\tilde{c}_t) \right] \quad (1)$$

であらわす。ここで  $\beta$  は時間選好率、 $u$  は各期の効用関数、 $E_0$  は 0 期の情報下での期待値、 $\tilde{c}_t$  は確率変数である。時間選好率がゼロに近いときには将来の消費よりも現在の消費に強い選好を持つことをあらわしている。

市場には  $m$  種類の資産が存在し、これらの資産が単一の消費財を生産しているとしている。ここで、生産にかかる費用はゼロであると、消費財はニューメレール財であるとする。個人は資産の株式を保有することにより、生産された消費財を配当として受け取り、これを消費することができる。個人は初期附存量として各資産の株式を 1 単位ずつ保有しているとする。市場にはこのような個人が複数いるが、効用関数と初期附存量が等しいので、初期附存量の株式を保有し続けることが均衡条件となる。これにより、生産と配当、そして消費が一致する。つまり、時間  $t$  における資産  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) の生産量を  $y_{it}$  とすると、時間  $t$  の消費  $c_t$  との間に、

$$c_t = \sum_{i=1}^m y_{it} \quad (2)$$

の関係が成り立つ。また、生産された消費財は生産された時間でのみ消費可能で、将来への持ち越しはできないものとする。

さらに、生産量の推移がマルコフ過程に従うとし、その推移確率を、

$$\text{prob}(y_{t+1} = \hat{y} | y_t = y) \quad (3)$$

としている。ここで  $y$  と  $\hat{y}$  は、 $m$  種類の資産の生産量を成分とする  $m$  次元のベクトルをあらわしている。すなわち、これは時間  $t$  で生産量の組  $y$  が観察されたときに、時間  $t+1$  で生産量の組  $\hat{y}$  が実現する確率が  $\text{prob}(y_{t+1} = \hat{y} | y_t = y)$  となることをあらわしている。マルコフ過程を考えると、 $t+1$  期における生産量の組の実現値は、 $t$  期の実現値にのみ依存し、 $t-1$  期以前の情報に依存しないことになる。

このとき個人の予算制約は、

$$c_t = \sum_{i=1}^m [y_{it} e_{it-1} + p_{it}(e_{it-1} - e_{it})] \quad (4)$$

となる。ここで  $e_{it}$  は時間  $t$  における資産  $i$  の株式保有量をあらわしており、個人はこの株式保有量を操作変数として生涯効用を最大化する。

ところで、モデルにマルコフ過程を導入することにより、資産の価格は時間にかかわらず観察された生産量の組  $y$  に依存して決まる。そこで各資産の価格から時間  $t$  を省略して  $p_i(y)$  であらわす。1 階の条件から、

$$p_i(y) u'(c_t) = E_t[\beta(\hat{y}_i + p_i(\hat{y})) u'(\tilde{c}_{t+1})] \quad \text{for } i = 1, \dots, m \quad (5)$$

を得る。ただし、 $E_t$  は  $t$  期の情報が与えられたときの期待値をあらわすオペレータである。ここから Lucas は、各資産の価格  $p_i(y)$  を成分とする価格ベクトル  $p(y)$  の決定を議論している。

## 2.2 エクイティプレミアム・パズル

Mehra and Prescott (1985) は、Lucas モデルがどれくらい現実の世界を説明しているかを検証している。検証をおこなうために Mehra and Prescott は、危険資産の期待収益率と安全資産の収益率の差で定義されるエクイティプレミアムを推定し、観測値と比較している。推定結果が観測値と一致すれば、モデルの諸仮定が現実をうまく表現していると考えられる。この検証をおこなうにあたって Mehra and Prescott は、Lucas モデルの特殊形を用いている。以下ではこの検証に用いられる Lucas モデルの特殊形を見ていく。この特殊形を Mehra and Prescott モデルと呼ぶことにする。

Mehra and Prescott モデルでは、Lucas モデル内の資産を 1 危険資産・1 安全資産として議論している。ここで危険資産とは、生産量が不確実な資産であり、安全資産とは生産量が確実に 1 の資産である。さらに、このモデルでは Lucas モデルと異なり、確率変数である危険資産の生産について生産量の変動率を導入している。そして、この生産量変動率の推移がマルコフ過程に従うとしている。これは消費成長率の統計量をモデルの内てで反映させるためである。また、Lucas モデルと同様に初期附存量として、個人は危険資産の株式を 1 単位保有するとし、個人の同質性から均衡においてこの株式を保有し続けるとしている。

また、各期の効用関数を相対的危険回避度一定 (CRRA) とし、すべての  $z$  にたいして、

$$u(z) = \frac{z^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (6)$$

で定義する。ただし、 $\alpha$  は個人の相対的危険回避度をあらわすパラメータである。また、 $\alpha = 1$  のときには、 $u(z) = \log z$  とする。この効用関数は、マクロ経済学や金融経済学で標準的な個人の選好関係とされている。このとき、均衡における各資産の価格決定を議論している。この均衡価格を用いて各資産の期待収益率を導出し、エクイティプレミアムをもとめた。

エクイティプレミアムの推定にあたって、Mehra and Prescott が用いたデータは 1889 年から 1978 年のアメリカのものである。危険資産として株式市場の指標である S&P500、安全資産として短期の政府負債のデータを用いている。同期間の平均収益率は、危険資産が 6.98%、安全資産が 0.80% であったので、この差をとってエクイティプレミアムの観測値は 6.18% となる。この観測値とモデルから推定されたエクイティプレミアムが一致するかどうか問題となる。

先述のとおり、Lucas モデルでは均衡において危険資産の生産、株式の配当、そして個人の消費が一致する。そこで、生産量変動率の平均と標準偏差が実際の消費データと一致するように上下動するとし、危険資産の生産量変動率を、

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \mu + \delta \\ y_2 &= 1 + \mu - \delta \end{aligned} \quad (7)$$

であらわす。ただし、 $\mu, \delta > 0$  であり、これらは消費成長率のデータから推定される。すなわち、 $\mu$  は消費成長率の平均、 $\delta$  は標準偏差と一致するように推定される。Mehra and Prescott は、他の先行研究から妥当と考えられる時間選好率の範囲を 0 から 1、相対的危険回避度を 0 から 10 としてエクイティプレミアムを計算した。

この結果、モデルから推定されたエクイティプレミアムの値は最大でも 0.35% であり、観測値 6.18% とは乖離があることを明らかにした。これを言い換えると、観測値を説明するには非常に大きな相対的危険回避度が必要となることを意味している。これがエクイティプレミアム・パズルと呼ばれる問題である。

### 3 先行研究

以下では Lucas (1978) モデルと Mehra and Prescott (1985) の指摘したエクイティプレミアム・パズルにたいする先行研究を分類し、これらを概観する。

#### 3.1 パズルの整合性

先述のとおり、観測されたエクイティプレミアムを説明するには非常に大きな相対的危険回避度が必要であった。Kandel and Stambaugh (1991) は個人の危険回避度が妥当としてきた 0 から 10 を大きく上回ると主張した。しかし、この主張は大きな問題を招いてしまうことになる。なぜなら、個人の危険回避度が非常に高い場合、個人はリスクを嫌って異なる事象間で同じ消費をしたいと考えるようになる。これと同時に、個人は異なる時間においても等しい消費を望むようになる。これにより、高い危険回避度を許容すると消費の成長が説明できなくなってしまう。実際に、1889 年から 1978 年におけるアメリカの平均消費成長率は 1.8% と高い値を示しており、Kandel and Stambaugh の議論では消費の成長を説明できない。

このことから、パズルの解決には妥当と考えられる十分に小さい危険回避度の範囲で高いエクイティプレミアムを説明できるモデルを示す必要があると考えられる。

#### 3.2 パラメータの推定

これまでの議論で用いられている手法は、エクイティプレミアムを推定し、観測値と比較するものであった。これとは別に、Hansen and Singleton (1982) は一般化積率法 (GMM) を用いてモデルのパラメータを推定し、この推定結果を検定している。これによりモデルとデータの当てはまりを実証的に検証することができると考えられる。1959 年から 1978 年のアメリカ資産市場のデータを用いて推定した結果、Hansen and Singleton は相対的危険回避度の符号が負となり、この推定結果が棄却されることを明らかにした。

Hansen and Singleton (1983) は最尤法を用いた推定をしている。一般化積率法のときと同じ 1959 年から 1978 年のデータを用いて推定した結果、一般化積率法の推定結果と同様に相対的危険回避度は負となり、推定結果が棄却されることを示した。

これらの結果は、モデルがデータから支持されないことを示している。このようなモデルとデータの当てはまりの悪さによって、エクイティプレミアム・パズルが発生していると考えられる。

### 3.3 日本データを用いた検証

これまでの議論はアメリカのデータにもとづいた検証であった。日本のデータを用いた検証でもっとも特徴的なものとして、Hamori (1992a, b) が挙げられる。これらの先行研究では、一般化積率法 (GMM) を用いて推定をおこなっている。Hamori (1992a) は1980年から1988年の国内の金融資産データを用いて相対的危険回避度と時間選好率の推定をおこなっている。この結果、時間選好率は0.997、相対的危険回避度は0.22と推定され、推定結果が採択されることが示されている。堀 (2000) はこの推定結果が頑健でないことを指摘しているが、先に述べたようにアメリカのデータを使用した場合にはいずれの推定結果も棄却されており、Hamori の推定結果は注目に値すると考えられる。

また、Hamori (1992b) は1980年から1990年の株式市場のデータを用いて同様の推定をおこなっている。推定結果は、時間選好率が0.989、相対的危険回避度は0.50から0.55であった。これについても推定結果が棄却されず、データとLucasモデルは当てはまりがよいことが示されている。これらの結果は、先に述べたアメリカのデータによる分析結果と大きく異なっている。

一方で、福田 (1993) は1981年から1989年の日本の金利データを用いて推定をおこなったが、推定結果がアメリカと同様に棄却されることを示した。これにより、パズルが起こっているとしている。Mehra and Prescott (2003) は、1970年から1998年の日本の消費データを使ってエクイティプレミアムを推定した場合には、観測値を説明するために個人の危険回避度が80以上必要であるとしている。このように、日本のデータを用いた場合にはパズルが起こっているかどうかの意見が分かれている。

しかし、いずれの場合でもアメリカの先行研究に比べてデータの期間が短いことは否定できない。日本のデータを用いた検証においても、長期的なデータを用いて議論することが必要であると考えられる。

## 4 日本のデータを使った数値計算

### 4.1 データ

まず最初に、数値計算に用いる日本の市場データについてみていく。

エクイティプレミアムの観測値をもとめるために、危険資産として1956年から2003年の東証株価指数 (以下ではTOPIX) の収益率についての年次データ\*、安全資産として郵便貯金の金利データ†を用いる。ただし、郵便貯金の金利は「1年以上1年6ヶ月未満の定額貯金」のデータを用いる。同期間におけるTOPIXの平均収益率は9.6%で標準偏差は25.9%、郵便貯金の平均収益率は3.7%、標準偏差は2.0%であった。エクイティプレミアムは危険資産と安全資産の平均収益率の差で定義されるので、この期間におけるエクイティプレミアムの平均は5.9%になる。よって、妥当と考えられるパラメータの下で、エクイティプレミアム5.9%が算出できれば、パズルは起こっていないと考えられる。

\*出典: 東京証券取引所 (<http://www.tse.or.jp/>)

†出典: 日本郵政 (<http://www.japanpost.jp/>)

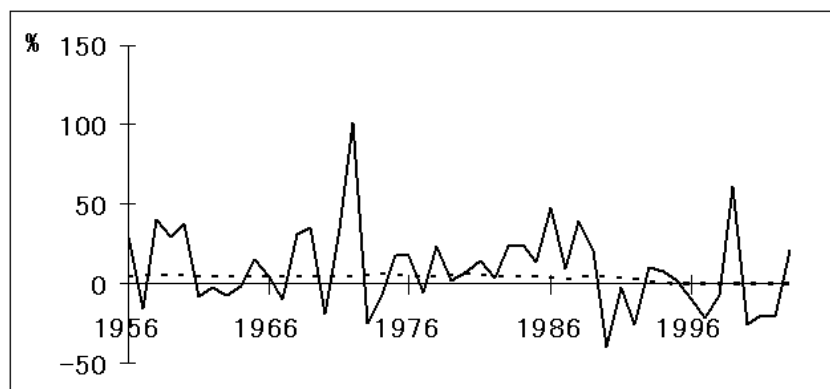


図 1: 1956 年から 2003 年における日本の危険資産と安全資産の収益率の推移（実線は TOPIX、破線は郵便貯金）

これらのデータについて、TOPIX は日本の株価指数の中でもっとも一般的なものの 1 つである。また、後で述べる S&P500 と同じ算出方法でもとめられる。日本のデータを用いた先行研究ではいずれも危険資産として TOPIX のデータを用いている。一方、郵便貯金は家計にとってもっとも安全な資産の運用方法として定着していると考えられる。また、預貯金は現金に準ずる流動性を持つとされているが、1 年以上 6 ヶ月未満の定額貯金の金利データを用いることで、流動性についての批判はある程度解消できるものと考えられる。先行研究では、安全資産として国債の金利や短期金利、コールレートのデータを用いているが、いずれも長期のデータは入手できていない。そこで、長期のデータを使う必要性から、以下では安全資産として郵便貯金のデータを用いることにする。

ここでもとめたエクイティプレミアムの観測値と先行研究の値を比較すると、Campbell (2003) と Mehra and Prescott (2003) は、1970 年から 1998 年の日本におけるエクイティプレミアムを 3.3% としている。また、山口 (2003) は、1952 年から 2002 年の TOPIX と 10 年ものの国債からエクイティプレミアムを 6.9% としている。Mehra and Prescott (2008) は、1900 年から 2005 年にわたる日本のエクイティプレミアムを 9.8% としており、いずれもここでもとめたエクイティプレミアムの観測値と同様に、危険資産の収益率が安全資産の収益率を大きく上回っていることがわかる。

次に、エクイティプレミアム推定に用いるデータについて確認する。詳細は後述するが、モデルでは各資産が単一の消費財を生産し、それを株式保有者に配当として分配し、個人はこの消費財を消費しているとしている。モデルの仮定から、資産の総生産量は GDP に該当すると考える。1956 年から 2003 年における実質 GDP 成長率<sup>‡</sup>の平均は 8.2% で標準偏差は 4.4% あった。

本章では GDP データによる推定との比較のために、日本の消費成長率のデータ<sup>§</sup>も用いてエクイティプレミアムを推定する。これは各年の実質 GDP に消費支出割合を掛け合わせることで消費支出額を求め、今年と前年の消費支出額の比から成長率を計算している。1956 年から 2003 年に

<sup>‡</sup>出典: Penn World (<http://pwt.econ.upenn.edu/>)

<sup>§</sup>出典: Penn World (<http://pwt.econ.upenn.edu/>)

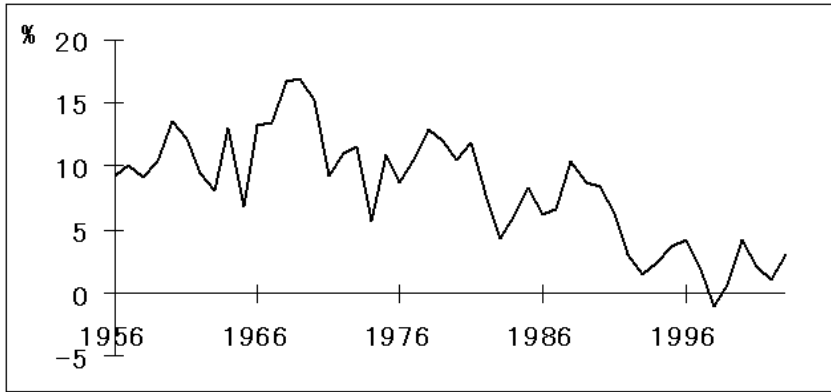


図 2: 1956 年から 2003 年における日本の GDP 成長率の推移

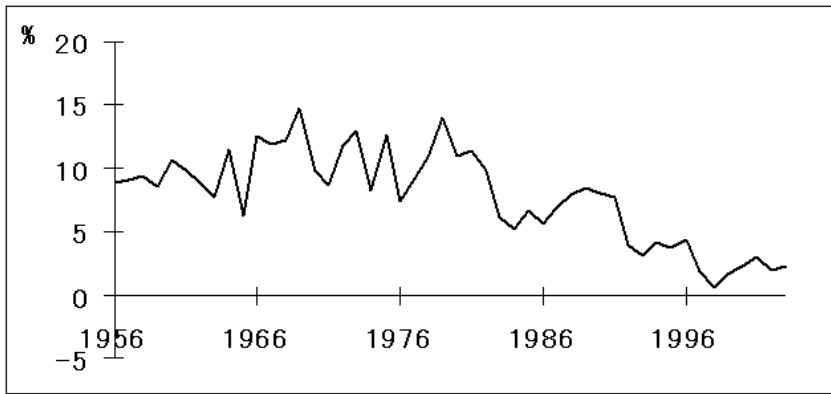


図 3: 1956 年から 2003 年における日本の消費成長率の推移

における消費成長率の平均は 7.8% で標準偏差は 3.8% あった。これらのデータを比較すると、消費成長率の平均は実質 GDP 成長率の平均よりも高く、標準偏差は実質 GDP 成長率の方が高いことがわかる。

Gollier (2001) と Barro (2006) は、エクイティプレミアムの推定に GDP データを使っている。一方で、Mehra and Prescott (1985) は、アメリカの消費データを用いている。このように先行研究では使用するデータが異なっているが、上で述べた Lucas モデルの仮定から、GDP データや消費データを用いることは妥当であると考えられる。

#### 4.2 Mehra and Prescott モデル

次に Mehra and Prescott モデルをみていく。このモデルでは、無限期間 ( $t = 0, \dots, \infty$ ) 生きる個人を考える。個人は各期の消費  $c_t$  から効用を得ており、消費財は 1 財だけとする。生涯効用が



時間加法的であるときに、個人の生涯効用は、

$$E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(\tilde{c}_t) \right] \quad (8)$$

であらわされる。ここで  $\beta$  は時間選好率、 $u$  は各期の効用関数、 $E_0$  は 0 期の情報下での期待値、 $\tilde{c}_t$  は確率変数である。

前節と同様に、市場には危険資産と安全資産が 1 つずつあり、それぞれが消費財の生産をおこなっているとする。個人は、各資産の株式を保有することで配当を得ることができる。ここでの危険資産とは、 $t$  期における投資への配当が確率変数で、 $t+1$  期に確定する資産である。また、安全資産とは 1 単位の投資にたいする配当が確実に 1 単位となる安全資産である。これらの配当は生産された消費財で支払われるものとする。さらに、消費財は配当がなされた期においてのみ消費が可能で、消費財の将来への持ち越しはできないものとする。

このとき  $t$  期 ( $t = 0, \dots, \infty$ ) における個人の予算制約は、

$$c_t = y_t e_{t-1} + p_{et}(e_{t-1} - e_t) + f_{t-1} - p_{ft} f_t \quad (9)$$

であらわされる。ただし、 $y_t$  は  $t$  期での危険資産の生産量、 $p_{et}$  と  $p_{ft}$  はそれぞれ  $t$  期における危険資産と安全資産の価格、 $e_t$  と  $f_t$  は  $t$  期における各資産の保有量である。右辺第 1 項は  $t$  期に危険資産から受け取る配当、第 2 項は  $t$  期における危険資産の売却益と購入額の差額、第 3 項は  $t$  期での安全資産の受け取り配当額、第 4 項は  $t$  期における安全資産の購入額をあらわしている。

個人が  $t$  期で決定するのは、危険資産の保有量  $e_t$  と安全資産の保有量  $f_t$  である。よって  $t$  期における 1 階の条件は、

$$p_{et} u'(c_t) = E_t[\beta(\tilde{y}_{t+1} + \tilde{p}_{et+1})u'(\tilde{c}_{t+1})] \quad (10)$$

$$p_{ft} u'(c_t) = E_t[\beta u'(\tilde{c}_{t+1})] \quad (11)$$

となる。

市場に参加する個人の選好が同じなので、均衡において個人は初期附存量である株式を保有し続けることになる。よって、均衡ではすべての  $t$  にたいして、

$$e_t = 1, f_t = 0, c_t = y_t \quad (12)$$

が成立する。

いま、危険資産について、

$$\tilde{y}_{t+1} = \tilde{a}_{t+1} y_t \quad (13)$$

とする。ここで、 $a_{t+1} \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbf{R}_+$  は資産の生産量変動率をあらわしており、 $\lambda_1 > \lambda_2 \cdots > \lambda_n > 0$  と仮定する。

危険資産の生産量変動率は次の推移確率を持ったマルコフ過程に従うものとする。この推移確率を、

$$\phi_{ij} = \text{Prob}(a_{t+1} = \lambda_j | a_t = \lambda_i) \quad (14)$$

であらわす。これは、 $t$ 期において  $a_t = \lambda_i$  が観察されたとき、 $t+1$ 期において  $a_{t+1}$  が  $\lambda_j$  となる確率が  $\phi_{ij}$  となることをあらわしている。さらに、この推移確率を成分とする推移確率行列を  $\Phi$  であらわす。

ところで、 $t$ 期における危険資産の生産量  $y_t$  が与えられると、 $t+1$ 期で任意の生産量変動率  $\lambda_j$  が実現したときの生産量  $y_{t+1} = \lambda_j y_t$  がわかる。また、 $t$ 期における生産量変動率  $\lambda_i$  が与えられると、マルコフ過程の推移確率により、 $t+1$ 期における生産量変動率  $\lambda_j$  に関する確率分布が特定される。よって  $t$ 期における各資産の価格は、 $t$ 期で観察された生産量と生産量変動率に依存して決まる関数としてとらえることができる。さらにこの関係は、マルコフ過程の定常性から時間にかかわらず成立する。

いま、 $t$ 期で観察された危険資産の生産量が  $y_t$ 、生産量変動率が  $\lambda_i$  とする。上述の通り、各資産の価格は任意の時間において  $y_t$  と  $\lambda_i$  に依存してもとめられるので、簡単化のために危険資産の生産量を  $y$  であらわすことにする。個人の効用関数はこれまでと同様に、相対的危険回避度一定 (CRRA) であるとする。このとき、先の1階の条件は、

$$p_e(y, \lambda_i)(y)^{-\alpha} = \beta \sum_{j=1}^n \phi_{ij} (\lambda_j y)^{-\alpha} (\lambda_j y + p_e(\lambda_j y, \lambda_j)) \quad (15)$$

$$p_f(y, \lambda_i)(y)^{-\alpha} = \beta \sum_{j=1}^n \phi_{ij} (\lambda_j y)^{-\alpha} \quad (16)$$

と書き直される。

ここで、危険資産の価格は生産量  $y$  の1次同次になっているので、危険資産の価格は、

$$p_e(y, \lambda_i) = w_i y \quad (17)$$

であらわすことができる。この  $w_i$  は、

$$w_i = \beta \sum_{j=1}^n \phi_{ij} \lambda_j^{(1-\alpha)} (w_j + 1) \quad \text{for } i = 1, \dots, n \quad (18)$$

である。危険資産の価格は  $w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) についての連立方程式を解くことでもとめられる。

ところで  $t$ 期の危険資産の生産量と生産量変動率がそれぞれ  $y$  と  $\lambda_i$  で、 $t+1$ 期の生産量変動率が  $\lambda_j$  で与えられているとき、危険資産の収益率  $r_e(y, \lambda_i, \lambda_j)$  は、

$$\begin{aligned} r_e(y, \lambda_i, \lambda_j) &= \frac{p_e(\lambda_j y, \lambda_j) + \lambda_j y - p_e(y, \lambda_i)}{p_e(y, \lambda_i)} \\ &= \frac{p_e(\lambda_j y, \lambda_j) + \lambda_j y}{p_e(y, \lambda_i)} - 1 \end{aligned} \quad (19)$$

であらわされる。さらに、 $t$ 期の危険資産の生産量と生産量変動率がそれぞれ  $y$  と  $\lambda_i$  のときの危険資産の条件付き収益率は、

$$R_e(y, \lambda_i) = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} r_e(y, \lambda_i, \lambda_j) \quad (20)$$

となる。

同様にして、 $t$  期の危険資産の生産量と生産量変動率がそれぞれ  $y$  と  $\lambda_i$  のときの安全資産の条件付き収益率は、

$$\begin{aligned} R_f(y, \lambda_i) &= \frac{1 - p_f(y, \lambda_i)}{p_f(y, \lambda_i)} \\ &= \frac{1}{p_f(y, \lambda_i)} - 1 \end{aligned} \quad (21)$$

であらわされる。

$\pi = \pi\Phi$  を満たすもので与えられるマルコフ連鎖の定常確率を、 $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_n] \in \mathbf{R}_+^n$  とする。ただし、 $\pi_i \geq 0$ 、 $\sum_i \pi_i = 1$  である。これを用いて危険資産と安全資産の期待収益率を求めると、

$$R_e = \sum_{i=1}^n \pi_i R_e(y, \lambda_i) \quad (22)$$

$$R_f = \sum_{i=1}^n \pi_i R_f(y, \lambda_i) \quad (23)$$

となる。よって期待エクイティプレミアムは、

$$R_e - R_f \quad (24)$$

であらわされる。

### 4.3 分析結果

ここでは先述の Mehra and Prescott モデルと GDP データを使ってエクイティプレミアムを推定する。推定の方法は Mehra and Prescott (1985) に従っている。危険資産の生産量変動率は、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \mu + \delta \\ \lambda_2 &= 1 + \mu - \delta \end{aligned} \quad (25)$$

であらわされるものとする。ただし、 $\mu, \delta > 0$  である。また、推移確率行列は、

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi & 1 - \phi \\ 1 - \phi & \phi \end{bmatrix}$$

とする。これらのパラメータ  $\mu$ 、 $\delta$ 、 $\phi$  はそれぞれ GDP 成長率の平均、標準偏差、1 階の自己相関と一致するように推定される。

このとき、生産量変動率の期待値  $E(\tilde{y}_t)$  と標準偏差  $E(\tilde{y}_t^2)$ 、1 階の自己相関  $E(\tilde{y}_{t-1}\tilde{y}_t)$  は、

$$\begin{aligned} E(\tilde{y}_t) &= 1 + \mu \\ E(\tilde{y}_t^2) &= \delta^2 \\ E(\tilde{y}_{t-1}\tilde{y}_t) &= 2\phi - 1 \end{aligned} \quad (26)$$

となる。このとき、各パラメータの推定量は、

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= M_1 - 1 \\ &= 0.044 \\ \hat{\delta} &= (M_2)^{1/2} \\ &= 0.041 \\ \hat{\phi} &= \frac{M_3 + 1}{2} \\ &= 0.47\end{aligned}\tag{27}$$

となる。ただし、 $M_1$  と  $M_2$ 、 $M_3$  は GDP 成長率の平均と標準偏差、1 階の自己相関である。

これに対応する定常確率は、

$$\pi^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

となる。

エクイティプレミアムを計算するにあたって、各変数の制約を以下の通りに定める。個人の相対的危険回避度は、先行研究と同じ  $\alpha \in [0, 4]$  とする。次に時間選好率を  $\beta \in (0, 1)$  とする。時間選好率  $\beta$  の制約については、Mehra and Prescott と同じ設定である。

これらのパラメータの制約と上述の 3 つの推定量、そしてモデルからエクイティプレミアムを算出する。時間選好率  $\beta$  が 0.80 から 0.99 の間にあるとき、数値計算の結果は次の通りであった。

表1 Mehra and Prescott モデルにおけるエクイティプレミアム  
(実質 GDP 成長率を用いた場合)

相対的危険回避度 ( $\alpha$ )	日本データを使用したときの エクイティプレミアム (%)
0	0
1	0.18~0.22
2	0.40~0.50
3	0.67~0.82
4	0.98~1.19
5	1.34~1.62
6	1.74~2.11
7	2.19~2.65
8	2.69~3.24
10	3.82~4.59
50	56.80~69.31

妥当と考えられる相対的危険回避度の範囲で、日本のデータを使用するとエクイティプレミアムの上限は1.19%と推定された。エクイティプレミアムの観測値5.9%を説明するために必要な相対的危険回避度は、12であった。この結果は、エクイティプレミアムの観測値とは乖離があることを示していると考えられる。よって日本とアメリカにおいてエクイティプレミアム・パズルが発生していると考えられる。

次に消費データを使った場合を考える。消費データを用いた推定結果は次の通りであった。

表2 Mehra and Prescott モデルにおけるエクイティプレミアム  
(消費成長率を用いた場合)

相対的危険回避度 ( $\alpha$ )	日本データを使用したときの エクイティプレミアム (%)
0	0
1	0.14~0.17
2	0.30~0.37
3	0.50~0.61
4	0.73~0.89
5	1.00~1.21
6	1.30~1.57
7	1.63~1.97
8	2.00~2.42
10	2.86~3.44
50	52.03~63.45

表から妥当と考えられる相対的危険回避度の範囲で、日本のデータを使用したときには推定値の上限は0.89%であった。エクイティプレミアムを説明するために必要な相対的危険回避度は、14であった。また、GDPデータを用いた方が消費データを用いたときよりも高いエクイティプレミアムを推定できることがわかる。しかし、エクイティプレミアムの観測値とは乖離があることがわかる。このことから、日本のデータを使用した推定でもエクイティプレミアム・パズルが起きていると考えられる。

## 5 まとめと今後の課題

ここまでわれわれは、1956年から2003年の日本のデータを用いて、エクイティプレミアムを推定してきた。先行研究では、アメリカにおいてはエクイティプレミアム・パズルの発生が示されていた。一方で、日本におけるエクイティプレミアム・パズルの有無について見解が分かれていた。

しかし、1956年から2003年のTOPIX、郵便貯金、GDPデータを用いると、モデルから推定されたエクイティプレミアムと観測値との間に乖離があることが明らかとなった。同時にGDPデータの代わりに消費データを用いて推定をおこなったが、この場合でも推定値と観測値に乖離があることが示された。このことから、日本においてもエクイティプレミアム・パズルが起きているものと考えられる。

今後の課題として、より精密な結果の検証が挙げられる。つまり、今回得られた結果は日本においてもアメリカと同様にパズルが起きているというものであった。しかし、推定値と観測値のずれの大きさは、アメリカに比べると日本の場合は明らかに小さい。推定値と観測値の乖離の程度についてはいまだ解釈がなされておらず、引き続き議論を進める必要がある。また、モデルを精緻化してパズルを解決するアプローチを示すことが重要である。特に、Rietz (1988) や Barro (2006) が示したような市場への深刻なショックを加味したアプローチの有効性を検証していく必要があると考えられる。

## 参考文献

- [1] Barro, J. R. (2006) Rare disasters and asset markets in the twentieth century. *Quarterly Journal of Economics* 121: 823-866.
- [2] Campbell, J. (2003) Consumption-based asset pricing. *Handbook of the Economics and Finance* Vol.1B, Chapter 13.
- [3] Duffie, D. (2001) *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press.
- [4] Gollier, C. (2001) *The Economics of Risk and Time*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [5] Hamori, S. (1992a) Test of CCAPM for Japan. *Economics Letters* 38: 67-72.
- [6] Hamori, S. (1992b) On the structural stability of preference parameters obtained from Japanese financial market data. *Economics Letters* 40: 459-464.
- [7] Kandel, S. and Stambaugh, R. (1986) Asset returns and intertemporal asset returns. *Journal of Monetary Economics* 27: 39-71.
- [8] Kocherlakota, N. (1996) The equity premium puzzle: it's still a puzzle. *Journal of Economic Literature* 34: 42-71.
- [9] Lim, G. and Maasoumi, E. and Martin, V. (2006) A reexamination of the equity-premium puzzle. *The North American Journal of Economics and Finance* 17: 173-189.
- [10] Lucas, R. (1978) Asset prices in an exchange economy. *Econometrica* 46: 1429-1445.
- [11] Mehra, R. and Prescott, E. (1985) The equity premium: a puzzle. *Journal of Monetary Economics* 15: 145-161.

- [12] Mehra, R. and Prescott, E. (1988) The equity premium: a solution? *Journal of Monetary Economics* 22: 133-136.
- [13] Mehra, R. and Prescott, E. (2003) The equity premium in retrospect. *Handbook of the Economics and Finance* Vol.1B, Chapter 14.
- [14] Mehra, R. and Prescott, E. (2008) The equity premium: ABCs. *Handbook of the Equity Premium*, Chapter 1.
- [15] Nakano, K. and Saito, M. (1998) Asset pricing in Japan. *Journal of the Japanese and International Economies* 12: 151-166.
- [16] Rietz, T. (1988) The equity risk premium: a solution. *Journal of Monetary Economics* 22: 117-132.
- [17] Weil, P. (1989) The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle. *Journal of Monetary Economics* 24: 401-421.
- [18] 祝迫得夫 (2001) 「資産価格モデルの現状：消費と資産価格の関係をめぐって」『現代ファイナンス』(9), 3-39.
- [19] 羽森茂之 (1996) 「消費者行動と日本の資産市場」東洋経済新報社.
- [20] 福田佑一 (1993) 「日本の利子率の期間構造分析-消費資産価格モデルの再検討-」『経済研究』(44), 221-232.
- [21] 堀敬一 (1999) 「資産価格モデルの実証研究：展望」『現代ファイナンス』(6), 47-97.
- [22] 堀敬一 (2000) 「資産価格パズル」筒井義郎編『金融分析の最先端』東洋経済新報社.
- [23] 山口勝業 (2003) 「株式リスク・プレミアム論争をめぐる論点整理」『第14回社会保障審議会年金部会資金運用分科会議事録』.
- [24] 山口勝業 (2007) 「日本経済のリスク・プレミアム」東洋経済新報社.