

回帰依存バックグラウンドリスクが 資産価格に与える影響[†]

尾 崎 祐 介[‡]

概 要

回帰依存で表現されたバックグラウンドリスクが存在する資産市場を考え、そのバックグラウンドリスクが資産価格に与える影響について考察する。絶対的リスク回避度が減少関数、かつ相対的リスク回避度が1以下の場合、回帰依存バックグラウンドリスクが資産価格を小さくすることを示した。

キーワード：回帰依存，株価プレミアムパズル，均衡価格，バックグラウンドリスク

1. はじめに

動機

Mehra and Prescott (1985) は, Lucas (1978) 型の経済で決定するリスク資産の価格が, 実際に観察されるリスク資産の価格と比較して大きいことを観察した。いわゆる, 株価プレミアムパズルとして知られる理論と実証の乖離である。その後, Lucas (1978) で考察された資産市場をより現実に近いことにより, このパズルの解決を目指した様々な研究が進められてきた。その中の一つに Weil (1992) がある。Weil (1992) は完備市場の仮定を緩和して, 資産市場で取引することができない労働所得の変動などを表すバックグラウンド・リスクを導入した資産市場を考察した。絶対的リスク回避度と慎重度が減少関数である (von Neumann-Morgenstern 型) 効用関数を持つ投資家が存在する資産市場では, バックグラウンド・リスクがリスク資産の価格を減少させることを示した。Weil (1992)

[†] 本稿の改訂に際して, 匿名の査読者から有益な助言をいただいた, また, 本稿は大阪産業大学大学間連携研究組織と科学技術研究費若手研究(B)から助成を受けている。記して感謝を表したい。

[‡] 大阪産業大学 経済学部

草 稿 提 出 日 2 月 9 日

最終原稿提出日 3 月 21 日

の決定した効用関数に対する条件は、多くの理論、あるいは実証研究で支持されている自然な条件であった。Weil (1992) はバックグラウンド・リスクが市場ポートフォリオと確率的に独立な確率変数であることを仮定していたが、この仮定は実際の経済を考えると妥当ではない。実際の経済では、資産市場と労働所得が連動しているのが自然だからである。本稿では、このような自然な状況を表すため、リスク資産の収益とバックグラウンド・リスクが正の確率的依存関係を持っている資産市場を分析していく。Telemer (1993)、そして Lucas (1994) は、独立なバックグラウンド・リスクがリスク資産の価格に与える影響がパズルの説明には不十分であることを実証的に観察した。これらは、今後の研究として以下が必要であることを示唆している。

- 市場ポートフォリオと正の確率的依存関係を持つバックグラウンド・リスクがリスク資産の価格に与える影響について考察する。
- 市場ポートフォリオと正の確率的依存関係を持つバックグラウンド・リスクがリスク資産の価格に与える影響が、市場ポートフォリオと独立なバックグラウンド・リスクが資産価格に与える影響よりも大きいか考察する。

本稿は最初に対応した研究である。バックグラウンド・リスクと市場ポートフォリオの確率的依存関係を回帰依存によって表現する。そして、市場ポートフォリオを回帰依存させるバックグラウンド・リスクがリスク資産の価格に与える影響について明らかにする。

関連研究

本稿で採用した回帰依存と呼ばれる確率的依存関係は数理統計学の分野において Lehmann (1966) によって導入された。Lehmann (1966) は二つの確率変数間の様々な確率的依存関係を導入し、その中の一つが本稿で採用した回帰依存である。Shea (1979) は回帰依存に関する理論的な結果とその応用について分析した。Aboudi (1995) は保険の最適需要、Wong (1996) は価格の不確実性に直面した企業の最適行動の分析に応用した。これらが経済学における初期の応用である。最近の文献としては、Dachraoui and Dionne (2001) が最適ポートフォリオの分析に応用している。また、Gollier (2004, 2007) は予測可能なリターンを回帰依存で表現した分析を行っている。本稿では比較静学の手法で目的を達成するが、その手法は Gollier (2001) の補題11を用いる。Gollier and Schlee (2011) は、この方法を用いて Blackwell の意味での情報が株価プレミアムに与える影響について明らかにした。確率的依存関係があるバックグラウンド・リスクが資産価格に与える影響について考察した論文としては、Heaton and Lucas (2000)、Viceira (2001) が初期の研究である。彼らの論文では、収益率が正規分布、効用関数がべき乗型であることを仮定し

ていた。本稿では、リターンや効用関数にその種の制約を課することなく分析を行っている。より最近の研究としては Arrondel and Calve-Pardo (2003) が実証研究を行った。Osaki (2005) は本論文と同様の問題意識で確率的依存関係のあるバックグラウンド・リスクを表現して分析を行った。Osaki (2005) は関数によって確率的依存関係を表現することで、二変数の問題を一変数に変換して分析を行った。しかし、Osaki (2005) が望ましい比較静学の結果を得るために課した効用関数の条件は厳しいものだった。

2. 資産市場

効用関数 u を持つ代表的投資家が存在する二期間のルーカス経済を考える。(Lucas, 1978) 投資家の効用関数は狭義に増加凹関数、また簡単化のために分析で必要とされる高次の微分が存在することを仮定する。一基金分離定理が成立している経済を考える。つまり、無リスク資産とリスク資産の二種類の資産からなる経済を考える。無リスク資産を経済の基準財とし、一般性を失うことなく粗利率は 1 に基準化する。投資家は期首において無リスク資産を w 単位保有している。投資家は確率ベクトル $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_s)$ を持つ確率変数 $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_s)$ で表現されるバックグラウンド・リスクに直面している。ただし、 $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_s$ 。バックグラウンド・リスク ϵ_s が実現した時のリスク資産のリターンは分布関数 $F_s := F(\cdot \mid \epsilon_s)$ を持つ確率変数 $\tilde{x}(\epsilon_s)$ 、価格は $q(\epsilon_s)$ でそれぞれ表される。また、投資家は期首においてリスク資産を 1 単位賦与されている。事後的な確率分布を $\mathbb{E}[\tilde{x}(\tilde{\epsilon}) \mid \tilde{\epsilon}] \stackrel{d}{=} \tilde{x}$ とする。ただし、 $\stackrel{d}{=}$ は分布の意味で等しいことを意味している。

- リスク資産の収益はバックグラウンド・リスク ϵ に対して単調に回帰依存するとする。

つまり、任意の $s < t$ に対して $\tilde{x}(\epsilon_t)$ は $\tilde{x}(\epsilon_s)$ を第 1 級確率支配の意味で支配する。

また、Shea (1979, 補題 2.1) によれば、これは $\text{cov}(\tilde{x}, \tilde{\epsilon}) > 0$ を意味している。

以上の設定の下で、バックグラウンド・リスク ϵ_s を所与とした時の投資家の問題は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \quad & \mathbb{E}[u(\alpha_0 + \alpha_1 \tilde{x} + \epsilon_s) \mid \epsilon_s] \\ & \alpha_0 + \alpha_1 q(\epsilon_s) = w + q(\epsilon_s). \end{aligned}$$

α_0 は無リスク資産、 α_1 はリスク資産に対する投資を意味している。Lagrange 関数を以下で定義する：

$$\mathcal{L}(\alpha_0, \alpha_1; \lambda) := \mathbb{E}[u(\alpha_0 + \alpha_1 \tilde{x} + \epsilon_s) \mid \epsilon_s] - \lambda(\alpha_0 + \alpha_1 q_s - w - q(\epsilon_s)),$$

ただし、 λ は Lagrange 乗数である。目的関数は凹関数で制約想定は制約式は線形関数なので、一階条件は、それぞれ以下で与えられる：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_0} &= \mathbb{E}[u'(w + \tilde{x} + \epsilon_s) \mid \epsilon_s] - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_1} &= \mathbb{E}[\tilde{x}u'(w + \tilde{x} + \epsilon_s) \mid \epsilon_s] - \lambda q(\epsilon_s) = 0\end{aligned}\tag{1}$$

目的関数が凹で制約式が線形なので、上の条件は最適性の必要十分条件である。代表的投資家が存在する資産市場なので、取引なし均衡が成立する、つまり、 $\alpha_0 = w, \alpha_1 = 1$ である。よって、以下を得る：

$$(1) \Leftrightarrow q(\epsilon_s) = \frac{\mathbb{E}[\tilde{x}u'(w + \tilde{x} + \epsilon_s) \mid \epsilon_s]}{\mathbb{E}[u'(w + \tilde{x} + \epsilon_s) \mid \epsilon_s]}.\tag{2}$$

回帰依存バックグラウンド・リスクが存在する時のリスク資産の価格は、以下で与えられる：

$$Q = \mathbb{E}[q(\tilde{\epsilon}) \mid \tilde{\epsilon}] = \frac{\mathbb{E}[\tilde{x}u'(w + \tilde{x} + \tilde{\epsilon}) \mid \tilde{\epsilon}]}{\mathbb{E}[u'(w + \tilde{x} + \tilde{\epsilon}) \mid \tilde{\epsilon}]}.$$

ここで、上の期待値は \tilde{x} と $\tilde{\epsilon}$ 二重期待値であることに注意が必要である。一方、回帰バックグラウンド・リスクが存在しないときのリスク資産の価格は、以下で与えられる：

$$q := q(\epsilon = 0) = \frac{\mathbb{E}[\tilde{x}u'(w + \tilde{x})]}{\mathbb{E}[u'(w + \tilde{x})]}.$$

以下の節で、 $Q \leq q$ となる効用関数の条件を導出することが目的となる。

3. 分析

最初に Gollier (2001; 補題11) が証明した補題について述べる：

補題 1 実数値関数 h_1, h_2 , そして $h_3 > 0$ を考える。以下の関数を定義する：

$$\begin{aligned}\psi(F) &= \frac{\int h_1(t)dF(t) \int h_2dF(t)}{\int h_3(t)dF(t)}, \\ V_1(F) &= -\frac{\int h_1(t)dF(t)}{\int h_3(t)dF(t)}, \quad V_2(F) = \frac{\int h_2(t)dF(t)}{\int h_3(t)dF(t)}.\end{aligned}$$

$F_i, F_j \in \mathcal{F} := \{F_1, \dots, F_S\}$ ($i < j$) とする。この時、以下の二条件は同値である：

任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して、 $\lambda\psi(F_i) + (1 - \lambda)\psi(F_j) \leq \psi(\lambda F_i + \lambda F_j)$

$[V_1(F_i) - V_1(F_j)][V_2(F_i) - V_2(F_j)] \geq 0$.

最初の条件は、 ψ が分布関数に対して凹であるという条件である。ここで、 $h_1 = 1, h_2 = xu'(w + x + \epsilon)$, そして $h_3 = u'(w + x + \epsilon) > 0$ とすると、

$$\psi(F) = \frac{\mathbb{E}[\tilde{x}u'(w + \tilde{x} + \epsilon) \mid \epsilon]}{\mathbb{E}[u'(w + \tilde{x} + \epsilon) \mid \epsilon]}$$

となるので、これは (2) より ϵ を所与とした時の価格に他ならない。Jensen の不等式から、上の条件が満たされると $Q = \mathbb{E}[\psi(\tilde{F})] \leq \psi(\mathbb{E}[\tilde{F}]) = q$ となる。つまり、補題 1 の二番目を満たす効用関数の条件を明らかにする必要がある。

補題 2 絶対リスク回避度 $-u''(x)/u'(x)$ が減少関数、かつ相対的リスク回避度 $-xu''(x)/u'(x)$ が 1 以下の時は $[V_1(F_i) - V_1(F_j)][V_2(F_i) - V_2(F_j)] \geq 0$ 。

証明 最初に、いくつかの記法を導入する。 $\epsilon_j - \epsilon_i := \epsilon > 0$ とする。また、 $w + \epsilon_i = e$ とする。

u' が減少関数であることから以下が成立する。

$$\int u'(e + x)dF(x \mid \epsilon_i) \geq \int u'(e + x)dF(x \mid \epsilon_j) \geq \int u'(e + \epsilon + x)dF(x \mid \epsilon_j)$$

最初の不等号は、 $\tilde{x}(\epsilon_j)$ が $\tilde{x}(\epsilon_i)$ を第一級確率支配の意味で支配することから得られる。これより、

$$V_1(F_i) = \frac{1}{\int u'(w + \epsilon_i + x)dF(x \mid \epsilon_i)} \leq \frac{1}{\int u'(w + \epsilon_j + x)dF(x \mid \epsilon_j)} = V_1(F_j)$$

を得る。 $V_1(F_i) - V_1(F_j) \leq 0$ を得たので、 $V_2(F_i) - V_2(F_j) \leq 0$ となる効用関数の条件について考えていく。Hardar and Seo (1990) によって指摘されたように、相対的リスク回避度が 1 より小さいことは $xu'(e + x)$ が増加関数となる十分条件である。

$\tilde{x}(\epsilon_j)$ が $\tilde{x}(\epsilon_i)$ を第一級確率支配の意味で支配するので、

$$\int xu'(e + x)dF(x \mid \epsilon_i) \leq \int xu'(e + x)dF(x \mid \epsilon_j)$$

が成立する。これと $\int u'(e + x)dF(x \mid \epsilon_i) \geq \int u'(e + x)dF(x \mid \epsilon_j)$ を合わせると、以下を得る。

$$\frac{\int xu'(e + x)dF(x \mid \epsilon_i)}{\int u'(e + x)dF(x \mid \epsilon_i)} \leq \frac{\int xu'(e + x)dF(x \mid \epsilon_j)}{\int u'(e + x)dF(x \mid \epsilon_j)} \quad (3)$$

次に、

$$\hat{f}(x; \epsilon) := \frac{u'(w + \epsilon + x)f(x)}{\int u'(w + \epsilon + x)f(x)dx}$$

と定義する。 $\hat{f} > 0$ かつ $\int \hat{f}(x)dx = 1$ なので、 \hat{F} は分布関数と見ることができる。DARA (Decreasing Absolute Risk Aversion) を仮定していたので、 $u(w + \epsilon_i + x)$ は $u(w + \epsilon_j + x)$ よりもリスク回避的となる。よって、標準的な議論に従って、 $\hat{f}(\epsilon_i)$ は $\hat{f}(\epsilon_j)$ に単調尤度比

支配の意味で支配されることが分かる。よって、以下が成立する。

$$\int x d\hat{F}(x \mid \epsilon_i) \leq \int x d\hat{F}(x \mid \epsilon_j)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\int xu'(w + \epsilon_i + x)dF(x)}{\int u'(w + \epsilon_i + x)dF(x)} \leq \frac{\int xu'(w + \epsilon_j + x)dF(x)}{\int u'(w + \epsilon_j + x)dF(x)}$$

上の結果で $F(x)$ を $F(x \mid \epsilon_j)$ で書き換えると以下を得る。

$$\frac{\int xu'(w + \epsilon_i + x)dF(x \mid \epsilon_j)}{\int u'(w + \epsilon_i + x)dF(x \mid \epsilon_j)} \leq \frac{\int xu'(w + \epsilon_j + x)dF(x \mid \epsilon_j)}{\int u'(w + \epsilon_j + x)dF(x \mid \epsilon_j)} \quad (4)$$

(3) と (4) を合わせると、

$$V_2(F_i) = \frac{\int xu'(w + \epsilon_i + x)dF(x \mid \epsilon_i)}{\int u'(w + \epsilon_i + x)dF(x \mid \epsilon_i)} \leq \frac{\int xu'(w + \epsilon_j + x)dF(x \mid \epsilon_j)}{\int u'(w + \epsilon_j + x)dF(x \mid \epsilon_j)} = V_2(F_j)$$

を得る。よって、題意は証明された。

補題2で得た結果を補題1に当てはめると以下の結論を得る。

命題1 効用関数が DARA で相対的リスク回避度が1より小さい時は、回帰依存バックグラウンド・リスクが存在する経済で決定するリスク資産の価格はバックグラウンド・リスクが存在しない経済で決定するリスク資産の価格と比較して小さくなる。

相対的リスク回避度に関する実証研究は近年、盛んに行われてる。その値が1より大きくなるか、小さくなるかについては一定の見解は得られていない。第一級確率支配よりも強い単調確率比支配で回帰依存を書き直すと、次の結果を得ることができる。補題1の(3)式が効用関数に対する制約を課さないで成立するので、相対的リスク回避度の条件が不必要になる。

命題2 回帰依存が単調確率比支配で表現されているとする。効用関数が DARA の時は、回帰依存バックグラウンド・リスクが存在する経済で決定するリスク資産の価格はバックグラウンド・リスクが存在しない経済で決定するリスク資産の価格と比較して小さくなる。

上の結果について二つのコメントをしておく。最初に、単調確率比支配は単調尤度比支配よりも弱い確率支配なので、単調尤度比支配の場合は同様の結果を得ることができる。次に、ほとんどの理論分布において第一級確率支配と単調確率比支配は同値である。つまり、実証的な観点から言えば、効用関数の条件は DARA だけということになる。このこ

とは、独立なバックグラウンド・リスクの場合と比較して緩い条件である。

4. 結論

本論文では労働所得など資産市場で取引されないバックグラウンド・リスクが存在する資産市場を分析した。多くの先行研究では、バックグラウンド・リスクは市場リスクと独立と仮定されていた。本論文では、先行研究と異なり、市場リスクがバックグラウンド・リスクに対して回帰依存するという状況を考察した。効用関数に一定の条件を課すことで、回帰バックグラウンド・リスクが資産価格を小さくすることを示した。これは、回帰バックグラウンド・リスクが株価プレミアムパズルの解決に貢献することを意味している。今後の研究としては、回帰依存も含めた依存関係のあるバックグラウンド・リスクと独立なバックグラウンド・リスクの比較が重要になる。なぜなら、独立なバックグラウンド・リスクが資産価格に与える効果は株価プレミアムパズルを十分に説明できないからである。

参考文献

- [1] Aboudi, R. and D. Thon. 1996. Second-degree stochastic dominance and random initial wealth with applications to the economics of insurance. *Journal of Risk and Insurance* **62**, 30–49.
- [2] Arrondel, L. and Calve-Pardo, H. 2003. Portfolio choice and background risks: Theory and evidence. DELTA discussion paper.
- [3] Dachraoui, K. and G. Dionne. 2001. Stochastic dominance and optimal portfolio. *Economics Letters* **71**, 347–354.
- [4] Gollier, C. 2001. *The economics of risk and time*. MIT press, Cambridge.
- [5] Gollier, C. 2004. Optimal dynamic portfolio risk with first-order and second-order predictability. *Contributions to Theoretical Economics* **4.4**.
- [6] Gollier, C. 2007. The consumption-based determinants of the term structure of discount rates. *Mathematics and Financial Economics* **1**, 81–101.
- [7] Goller, C. and E. Schlee. 2011. Information and the equity premium. *Journal of the European Economic Association* **9**, 870–902.
- [8] Hadar, J. and T. K. Seo. 1990. The effects of shifts in a return distribution on optimal portfolios. *International Economic Review* **31**, 721–736.
- [9] Heaton, J. and D. Lucas. 2000. Portfolio choice in the presence of background risk. *Economic Journal* **110**, 1–26.
- [10] Lehmann, E. L. 1966. Some concepts of dependence. *Annals of Mathematical Statistics* **37**,

1137-1153.

- [11] Lucas, R. 1978. Asset prices in an exchange economy. *Econometrica* **46**, 1429-1446.
- [12] Lucas, D. 1994. Asset pricing with undiversifiable income risk and short sales constraints: Deeping the equity premium puzzle. *Journal of Monetary Economics* **34**, 325-341.
- [13] Mehra, R and E. Prescott. 1985. The equity premium: A puzzle. *Journal of Monetary Economics* **15**, 145-161.
- [14] Osaki, Y. 2005. Dependent background risks and asset prices. *Economics Bulletin* **4.8**, 1-8.
- [15] Shea, G. 1979. Monotone regression and covariance structure. *Annals of Statistics* **7**, 1121-1126.
- [16] Telmer, C. I. 1993. Asset-pricing puzzles and incomplete markets. *Journal of Finance* **48**, 1803-1832.
- [17] Viceira, L. M. 2001. Optimal portfolio choice for long-horizon investors with nontradable labor income. *Journal of Finance* **56**, 433-70.
- [18] Weil, P. 1992. Equilibrium asset prices with undiversifiable labor income risk. *Journal of Economic Dynamics and Control* **16**, 769-790.

The Effect of Regression Dependent Background Risk on Asset Prices

OSAKI Yusuke

Key Words : regression dependence, equity premium puzzle, equilibrium price, background risk

JEL classification numbers : D81, G12

Abstract

This paper considers a static existing asset market with dependent background risk, which is described as regression dependence. We examine a condition of preferences to determine that a dependent background risk decreases equilibrium asset prices. In such a condition, absolute risk aversion decreases and relative risk aversion is less than unity.