伊藤 誠†

#### 1 慣性力

我々は日常生活の中で、いくつかの慣性力を体感することが出来る。例えば信号待ちをしている自動車が青信号になって動き出すとき、静止状態から加速する。このとき車内から信号待ちをしている人を見ると、後方へ加速度運動しているように見える。信号待ちの人は実際は静止しているのだが、後方へ加速度運動しているように見えるのだから、車内の人からは信号待ちの人には何らかの力が働いているように見える。この力が慣性力である。逆に車内の人は自動車が加速するのと同時に自動車に合わせて自身も加速しないと取り残されてしまう。しかし車内の人は自動車のシートに背中を押してもらうことによって自身も加速するので取り残されることはない。このときシートが背中を押す力を、人はシートに押し付けられたように感じる。車内の人はこのシートに押し付けられるという感覚によって慣性力を体感することが出来る。

次に電車と自動車が並走していたとしよう。電車がカーブに差し掛かかったとき、電車内の人から自動車を見ると、自動車は加速しながら電車から遠ざかっていくように見える。自動車を加速させているように見える力が「遠心力」1として知られている慣性力である。電車がカーブを曲がるとき電車には向心力が働いて、カーブを曲がるという加速度運動をする2。その時、電車内の人はそのまま何もしないと車外に放り出されてしまう。そこで放り出されまいと電車の床を踏みしめたり、あるいはつり革や手摺にしがみついたりする。この力が向心力となって人もカーブを曲がることが出来る。このように人は外に放り出される感覚として「遠心力」の存在を感じることが出来る。

慣性力は、信号待ちの人や自動車に対し実際に作用しているわけではない見かけの力である。しかし見かけの力ではあるが、我々はこれらの力を普段の生活の中でその存在を自身に働く力として体感することが出来る。<sup>3</sup>

上記以外の慣性力の代表的なものにコリオリ力がある。コリオリ力とは、回転 座標系に対して速度を持つ場合に生じる慣性力である。当然回転座標系であるの で遠心力も生じるが、遠心力は回転座標系に対して静止していても生じる慣性力

<sup>†</sup>大阪産業大学 経済学部 経済学科 教授

草稿提出日10月5日

最終原稿提出日10月6日

<sup>1</sup>実際は後で見るように「コリオリカ」も働く。

 $<sup>^2</sup>$ カーブを曲がるとき、電車の「速さ (speed)」は変わらないが向きまで含めた「速度 (velocity)」は変化している。「速度」が変化することを加速度運動と呼ぶ。

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>正確に言うと、体感できる理由は、我々が加速度運動する非慣性系とともに運動しているからである。

である。しかしコリオリ力は回転座標系に対して速度を持たなければ生じること はない。

例えば、低気圧や台風の周りの風が、北半球では反時計回りに、南半球では時計回りに回転しているが、この回転を引き起こしている力がコリオリ力である。実際空気の流れは、回転(自転)している地球に対して、低気圧・台風の中心に向かって速度を持って移動している。他には、科学館などで見ることが出来る巨大なフーコーの振り子がある。振り子の振動面が時間とともに回転するのだが、その回転を引き起こす原因となる力がやはりコリオリ力である。

上記のコリオリカの例は全て地球規模で起こる現象である。さて我々も車で移動したり、駆け足をしたりして地球に対して速度を持つことがある。では地球上で移動している時、地球に対して速度を有しているはずの我々はコリオリカを体感することは出来るのだろうか。しかし残念なことに地球が回転(自転)していると感じることが出来ないのと同様に、日常生活の中で地球の回転(自転)に起因するコリオリカを体感することはない。地球の自転の角速度が小さすぎるためである4。

では他のものでコリオリカを体感することは出来ないのだろうか。例えば遊園 地などにある回転する遊具の上を、自身の体を何かで支えることなく移動するれ ば恐らくコリオリカ (実際は遠心力も同時に働くのでその合力) を体感することが 出来るであろう。しかし現在このような危険な行為は許されないため、我々が遠 心力のように日常生活の中で容易にコリオリカを体感することは難しい。

このように日常生活の中でコリオリ力を体感することが出来ないことが、コリオリカに対する理解の妨げになっているのではないだろうか。実際力学の初学者の中には「コリオリカ」を理解できないものも大勢いるであろう。では日常生活の中で「コリオリカ」を体感することは出来ないとしても、何か別の方法でコリオリカに対する理解を深めることは出来ないものであろうか。

そもそも慣性系でたとえ等速運動していたとしても、回転座標系では加速度運動として観測される。その加速度を説明するために必要な力が慣性力である。ところが回転座標系での質点の運動がどのようなものになるかは、実は単なる座標変換に過ぎない。

したがってまず初めに、慣性系での運動が回転座標系で座標変換によってどのような軌道を描くのかを理解し、次に慣性力を含む運動方程式から求めた質点の運動の軌跡と座標変感から求めた軌跡とが一致することを確認すれば、遠心力とコリオリ力に対する理解が深まるものと思われる。

そこで本稿では、具体的な運動に対して座標変換を施し、それによって得られた運動の軌跡と、回転座標系における運動方程式を解くことによって得られる運動の軌跡とが一致することを確認してみることにする。このとき同時に作用している遠心力とコリオリカを可視化することにより、さらにコリオリカに対する理解を深めることを目的とする。

 $<sup>^4</sup>$ 地球の自転の角速度は  $\omega=2\pi/24$  時間 =  $7.27\times10^{-5} {
m rad/s}$  である。

本稿では、計算や結果の可視化に SageMath を用いることにする。SageMath の 有用性については、例えば拙著 [1] を参照して欲しい。

#### 2 回転座標系

前節で書いた通り、遊園地の回転する遊具は回転座標系の身近な例になる。また映像資料などでよく見かける実験室の回転台も「見たことがある」ような、あるいは「想像することが出来る」回転座標系の例となるであろう。

実験室の回転台とは、人が乗ることが出来る程度の大きさを持った円形の「回転」する「テーブル」のようなもので、端にスロープが固定されているものを想像するとよいであろう。「回転台」上にいる観測者はこのスロープ上の溝に沿って「球体」を「回転台」の中心に向けて転がす実験をすることが出来る。映像資料等では、この実験で「回転台」の中心に向かうはずの「球体が」観測者から見て右方向に曲がっていく様子が示される。そしてこれが「コリオリ力が作用したためである」と説明がなされる。映像を見た多くの初学者は狐につままれたような面持ちで、「そうかこれがコリオリ力か」と「分かったような気分」になるのである。

## 3 運動方程式と慣性力

回転座標系 (以後 S' 系) における運動方程式は大学初学年で習う力学の教科書に書かれている。その運動方程式は以下で与えられる [2]。

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v'} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r'})$$
 (1)

ここで $\omega$  は慣性系 (以後 S 系) に対する S' 系の角速度。m は質点の質量、r'、v'、a' はそれぞれ S' 系での質点の位置座標、速度、加速度である。ただし角速度  $\omega$  は一定 ( $d\omega/dt=\dot{\omega}=0$ ) であるとした。また質点の質量 m と質点に作用する外力 F はどちらの座標系でも等しい。方程式 (1) の右辺第 2 項がコリオリ力であり、第 3 項が遠心力である。

(1) 式から分かるようにコリオリカや遠心力はベクトル積で与えられる。このことが理解を妨げる一因になっているのかも知れない。本稿では運動方程式を眺めるだけではなく、具体的な問題について考察することにより、慣性力の理解を深めることにする。

## 4 問題設定

本稿で取り上げる具体例として、実験室の「回転台」に固定された座標系を S'系の例として用いることにする。つまり広い実験室内に「回転台」が置かれている状況を考える。実験室系は S 系とみなして良い。

まずS'系の原点を「回転台」の中心にとり、S系の原点と一致させる。回転軸をz、z'軸とし、「回転台」面上に沿ってx、y軸、x'、y'軸をとる。

本稿では外力が働かない自由粒子を考える (F=0)。また運動を x-y、 x'-y' 平面上に制限する。これにより質点の座標は  $\mathbf{r'}=(x',y',0)$  となる。また角速度ベクトルは  $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$  となる。運動方程式 (1) を成分で表すと、

$$\ddot{x}' = 2m\omega \dot{y}' + m\omega^2 x' \tag{2}$$

$$\ddot{y}' = -2m\omega \dot{x}' + m\omega^2 y' \tag{3}$$

となる。

さらに問題設定を簡単にするため、回転台の角速度を  $\omega=1$  とし、回転台の半径を 1 とする。外力を受けずに運動する質点 (球体) の質量を m=1 とする。すると運動方程式は

$$\ddot{x'} = 2\dot{y'} + x' \tag{4}$$

$$\ddot{y'} = -2\dot{x'} + y' \tag{5}$$

となる。初期時刻 t=0 で S 系と S' 系の x 軸と x' 軸、y 軸と y' 軸が一致しているものとし、t=0 で質点の座標は  $\mathbf{r}=\mathbf{r}'=(1,0,0)$  であるとする。ここで  $\mathbf{r}=(x,y,0)$  である。また質点の運動は等速なので、速度は S 系で  $v=|d\mathbf{r}/dt|=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}=$  const. となる。

本稿では以下の3つの場合について考察をする。いずれもS系に於ける問題設定である。

#### (a) 回転台に接する等速直線運動

質点のS系での軌跡は図1の青線になる。始点は(1,0)である。紫色の円が回転台に相当する。この軌跡のS系での座標と速度は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 (6)

である。ただし $0 \le t \le 2\pi$ とする。

(b) 回転台の中心に向かう等速直線運動 この場合の質点の軌跡は図1の赤線 である。S系での座標と速度は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - t/2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$
(7)

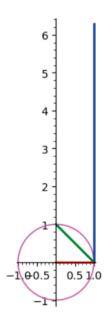


図 1: 問題設定

である。ただし $0 < t < 2\pi$  とする。

#### (c) 回転台を斜めに横切る等速直線運動

質点の軌跡は図1の緑線である。S系での座標と速度は

である。ただし $0 \le t \le 1$ とする。

いずれの場合も等速直線運動であるから本質的に同一の問題設定であるが、それぞれの場合で質点が S'系でどのように運動するのか興味があるので別の設定とした。

時間設定は、設定 (a) では回転台が1回転する時間とした。設定 (b) の場合も回転台が1回転する時間であが、その時刻に質点が中心に到達するよう速度を調整した。また (c) は質点が回転台上にいる時間とした。

これらの設定例は、具体的な事例との対応づけが可能である。設定 (a) は点 (1,0) まで電車と自動車が並走し、点 (1,0) で電車は紫色の円形カーブに沿って曲がり始め、自動車はそのまま青線を直進する場合に相当する。電車が円形カーブを一周した時、自動車は青線の先端に到達している。

設定 (b) は回転座標系の中心に回転する椅子を置きその椅子に人が腰掛けているいる場合に相当する。椅子を角速度1で回転させ、点(1,0)から中心に向かってボールを等速で転がしたとする。今の場合椅子がちょうど一回転したときにボールが中心に到達する。

設定 (c) はスロープを転げ落ちる球体のモデルとなる。実際、S' 系で球体がスロープを転がり落ちる現象を S 系で観測すると、球体はスロープの端で回転台に到達したとき、回転台の中心方向の速度と同時に回転台に接する方向への速度成分を持つことになる。接線方向の速度成分の大きさは当然回転台の半径1 での接線方向の速度  $v_{\theta} = r\omega = 1$  に等しくなる。この問題設定では回転台の中心へ向かう速度も1 であるとした。すると S 系では質点は図1 のように始点 (1,0) から左上方 45 度の方向へ進むことになる。このように設定 (c) はスロープを転がり落ちる球体をモデル化したものになる。

ではこれらのS系での運動がS'系でどのように観測されるのか、まずS系からS'系への座標変換で考えてみよう。

#### 5 座標変換

問題設定で $\omega = (0,0,1)$  としたから、S 系から S' 系への座標変換は

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
 (9)

で与えられる。したがって設定 (a) から (c) の S' 系の座標と質点の運動はそれぞれ

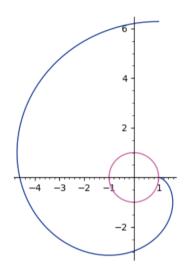
となる。以下にそれぞれの S' 系における質点の運動の軌跡を図示する。いずれの場合も S 系で等速直線運動していた質点が、S' 系では軌跡が曲線を描き、加速度運動していることが分かる。

先に述べた具体例との関係を見てみよう。まず設定 (a) では S' 系の点 (1,0) で静止している人、つまり電車内にいる人から見た自動車の軌跡が青線になる。 $t=2\pi$  で円形レールを一周した時、自動車ははるか前方へ移動していることになる。設定 (b) では S' 系の原点に静止した椅子に腰掛けた人から見たボールの軌跡が赤線である。S 系では真っすぐ中心に向かうボールが椅子に腰掛けた人から見ると自身の周りを一周回ってから自身のところに到着したように見える。設定 (c) の場合スロープを転がり落ちた球体の回転台上での軌跡が緑線である。つまり始点 (1,0) にて、S' 系で静止している観測者は、スロープを転がり落ち回転台の中心へ向かったはずの球体が、右に曲がるのを観測することになる。問題設定のところで述べたように S 系で球体が回転台の端で回転台の接線方向に速度成分を持つ。このことが、S' 系で球体が右に曲がって観測される原因となるわけである。

### 6 運動方程式の解

では次に、運動方程式(4)と(5)を実際に解いて質点の軌跡を求め、座標変換で 求めた軌跡と一致することを確認してみよう。

SageMath を用いて常微分方程式を解く方法については、付録 A にまとめた。付



0.5 0.5 0.5 0.5 0.5

図 2: (a) の S' 系での軌跡 (青線)

図 3: (b)の S'系での軌跡(赤線)

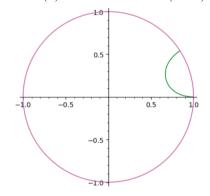


図 4: (c)の S'系での軌跡 (緑線)

録 A に合わせて運動方程式 (4)、(5) を書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= v'_x \\ \frac{dy'}{dt} &= v'_y \\ \frac{dv'_x}{dt} &= 2v'_y + x' \\ \frac{dv'_y}{dt} &= -2v'_x + y' \end{aligned}$$

となる。 $x'=x_1$ 、 $y'=x_2$ 、 $v'_x=x_3$ 、 $v'_y=x_4$  とおくと、右辺の関数はそれぞれ  $f_1=x_3$ 、 $f_2=x_4$ 、 $f_3=2x_4+x_1$ 、 $f_4=-2x_3+x_2$  となる。設定 (a)、(b)、(c) のいずれの場合も解くべき運動方程式は同一で、初期条件と積分範囲が異なるだけ である。なお当然のことであるが、初期条件は S' 系での質点の初期座標と初速度 を与える必要がある。

以上のことに注意して運動方程式を数値的に解いた結果を以下の図 5,6,7 に示す $^5$ 。それぞれ「黒点」が数値解であり、曲線が座標変換で求めたものである。

これらの図から明らかなように、数値解と座標変換から求めた質点の軌跡は完全に一致している。S系で等速直線運動している質点を S'系から見たときの座標変換で得られた軌跡と、遠心力とコリオリ力を含む運動方程式の解と一致することから、曲線軌跡を描く加速度運動が遠心力とコリオリ力によって決定されていることを見て取ることが出来る。では実際に遠心力とコリオリカを図示してみよう。

### 7 遠心力とコリオリカ

方程式(4)、(5)より遠心力とコリオリカの成分はそれぞれ

$$\mathbf{F}_{\text{cent}} = (x', y')$$
  
 $\mathbf{F}_{\text{Cori}} = (2v'_y, -2v'_x)$ 

である。このことから遠心力は回転中心から質点の位置方向外向きで、距離に比例した大きさの力であり、コリオリカは質点の速度の方向に垂直で速さの 2 倍に比例した大きさを持つ力であることが分かる。当然コリオリカは速度を持たないと生じない。

これらの力を例えば図 5 の設定 (a) の場合について、質点の軌跡の図と重ねて表示してみる。以下の図 8 では  $t=\pi$ 、 $t=3\pi/2$ 、 $t=2\pi$  における、遠心力 (赤)、コリオリカ (緑) 及びその合力 (青) を示した。

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>SageMath を用いた具体的な解法は付録 B を参照。

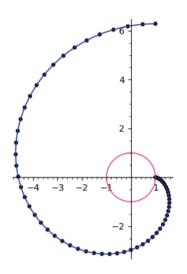


図 5: (a) の S' 系での数値解

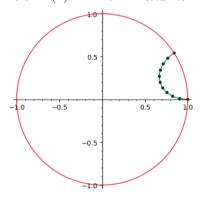


図 7: (c) の S' 系での数値解

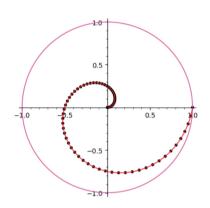


図 6: (b) の S' 系での数値解

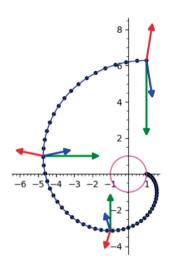


図 8: 設定(a)での遠心力(赤)、コリオリカ(緑)及びその合力(青)

この図から2つの慣性力の合力によって質点の軌跡が決定されることがよく分かる。カーブを曲がる電車内から見た自動車には、「遠心力」と「コリオリ力」の両方が働いていることが分かる。なお力の大きさは図が見やすくなるように、大きさの比を保ったまま適当に規格化してある。

### 8 まとめ

本稿では日常生活で体感することが難しい「コリオリカ」に焦点を当てた。実際コリオリカを感じるためには、比較的大きな角速度を持って回転している台等の上で移動しなければならない。そのような危険な行為を行うことは難しいので、本稿では回転座標系から見た自由粒子の軌跡を、「座標変換」と「運動方程式の数値解」を比較し、またその時粒子(質点)に作用する遠心力とコリオリカを可視化することにより理解を深めることとした。

大学初学年の力学の教科書には非慣性系における慣性力の解説は必ずなされる。また回転座標系での遠心力とコリオリ力の解説もなされている。しかし、「座標変換」を用いて解説してある教科書はあまり見当たらないようである<sup>6</sup>。本稿ではまず自由粒子の軌跡 (等速直線運動) が、回転座標系ではどのような軌跡を描くのかを、いくつかの問題設定に対して「座標変換」をすることによって理解した。そして回転座標系での運動方程式を数値的に解くことにより粒子の軌跡を求め、それが座標変換から得られたものと一致することを確認した。加えて遠心力とコリ

 $<sup>^6</sup>$ 文献 [2] の演習問題に、本稿で取り上げた設定 (a) と同じ内容の問題がある。ただし慣性力の可視化はなされていない。

#### コリオリカ (伊藤 誠)

オリカを粒子の軌跡に重なるように可視化することにより、慣性力が粒子の軌跡に与える影響を見た。このことにより、単に映像資料による球体の運動(回転テーブル上を右方向に曲がる)を見るだけ、あるいはベクトル積を含む運動方程式を眺めるだけではなかなか理解しづらい「コリオリカ」についての理解が深まるものと思われる。

更に議論を勧めて、台風の周りの風やフーコーの振り子の考察を行うべきなのであろうが、問題設定が複雑になるのでここではその考察は行わない。将来の課題とした。

本稿の計算・可視化は ubuntu 22.04上の SageMath 9.5を用いた。SageMath はフリーソフトウェアで、ubuntu のような Linux 上だけではなく、MacOS や windows の WSL2(Windows Subsystem for Linux 2)上でも利用することが出来る。何か疑問が生じたときや、理解しづらいことに遭遇したとき、手持ちのパソコンと SageMath があれば僅かな手間で計算や可視化を行うことが出来、理解への手助けとなるであろう。

# A SageMathによる常微分方程式の数値解法

文献 [1] で述べた通り、SageMath を使って数値的に常微分方程式を解くには、desolve\_system\_rk4 を用いる。しかし [1] では解法についての記述しなかった。ここに常微分方程式の数値解法をまとめておく。

まず解くべき連立常微分方程式を

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\dots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

とする。解法の書式は

desolve\_system\_rk4([
$$f_1, \dots, f_n$$
], [ $x_1, \dots, x_n$ ], ivar= $t$ , ics=[ $t_i, x_1(t_i), \dots, x_n(t_i)$ ], end\_points= $t_f$ , step=0.1)

である。ここで  $t_i$  と  $t_f$  はそれぞれ、初期時刻と最終時刻である。ics は初期条件である。step の値 0.1 はデフォルト値であり変更可能である。戻り値の解は、各時刻における解の値を

$$[t, x_1, \cdots, x_n]$$

のようにリストにまとめた、リストのリストとなる。解の様子を図示する場合は、 必要となる値をリストから抽出してプロットすればよい。

desolve\_system\_rk4 はその名前から分かるように、4次のルンゲクッタ法を用いた、常微分方程式を解くための関数である。4次のルンゲクッタ法を自身でプログラムすることはさほど難しいことではないが、SageMathのdesolve\_system\_rk4は解くべき方程式を解析的に関数の引数として渡すことが出来る等、一般のプログラミング言語を用いるよりも容易に常微分方程式を解くことが可能である。

# B 設定(a)のSageMathによる解法と可視化

設定(a)をSageMathを用いて数値解を求めた場合の画面。以下はjupyter-labの画面である。

```
import numpy as np  
var('t x y vx vy')
eqs = [vx, vy, 2 * vy + x, -2 * vx + y]
sol = desolve_system_rk4(eqs, [x, y, vx, vy], ivar=t, ics=[0, 1, 0, 0, 0], end_points=2*np.pi)

# Plot
P1 = parametric_plot((cos(t) + t*sin(t), -sin(t) + t*cos(t)), (t, 0, 2*pi), color='blue')
P2 = parametric_plot((cos(t), sin(t)), (t, 0, 2*pi), color='magenta')
pos = [(x, y) for t, x, y, vx, vy in sol]
P3 = point(pos, size=20, color='black')
show(P1 + P2 + P3)
```

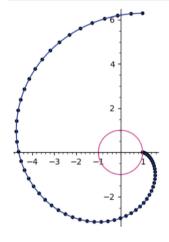


図 9: 設定 (a)

上図を見て分かる通り、SageMath を用いると僅かな行数で、数値解を求め、結果の可視化を行うことが出来る。また SageMath が Python で記述されているため、数値解から必要となる値を抽出するのに Python の内包表記を用いている。

# 参考文献

- [1] 伊藤 誠 (2021) 測地線・曲率テンソルと SageMath (大阪産業大学経済論集)
- [2] 兵頭俊夫 (2021) 考える力学 第 2 版 (学術図書出版社)

#### Coriolis Force

ITOH Makoto

**Key Words:** Inertial Force, Centrifugal Force, Coriolis Force, Computer Algebra System

#### Abstract

It is difficult to understand the Coriolis force, one of the inertial forces. The main reason is that we cannot experience the Coriolis force in our daily lives. To understand the Coriolis force, we first obtained the trajectory of a free particle in a rotating coordinate system by coordinate transformation of its trajectory in an inertial system. Then, by solving the equations of motion including inertial forces in the rotating coordinate system numerically to obtain the trajectory of the free particle and comparing it with the trajectory obtained by the coordinate transformation, it became possible to understand that the centrifugal force and Coriolis force determine the trajectory in the rotating coordinate system. Furthermore, by visualizing the trajectories of particles and inertial forces, it is possible to understand the relationship between inertial forces and trajectories. For visualizations and calculations, we used SageMath, which is a free computer algebra system software. The usefulness of SageMath is also clarified.