『緝古算経』訳注[†]稿（3）

田　村　　誠[††]・張　替　俊　夫[††]

中国古算書研究会

大川　俊隆、小寺　裕、田村　誠

馬場　理恵子、張替　俊夫

Translation and Annotation of "Continuation of Ancient Mathematics （緝古算経）" Vol. 3

TAMURA Makoto, HARIKAE Toshio

Abstract

"Continuation of Ancient Mathematics（緝古算経）" was written by early Tang dynasty calendarist and mathematician Wang Xiaotong some time after the year 626, and was listed as one of the Ten Computational Canons（算経十書）compiled during Tang dynasty. The aim of our studies is to provide a complete translation and annotation of the book based on a series of our researches on ancient Chinese mathematical books.

This is the third article, in which we treat with the problems 6 to 9.

『緝古算経』は初唐の暦学者であり数学者である王孝通によって626年の少し後に書かれたもので、唐代に編纂された算経十書中の一書である。我々の研究が目的とするのは、我々

[†] This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 18K00269.

[††] 大阪産業大学 全学教育機構 教授

草 稿 提 出 日　6月30日

最終原稿提出日　7月8日

の一連の中国古算書研究を踏まえ、同書に完全な訳と注を与えることにある。

本論文はその第3号であり、算題［六］～［九］について扱う。

［六］假令四郡輸粟、斛法二尺五寸。一人作功爲均、自上給甲、以次與乙〈・丙・丁〉[一]。其甲郡輸粟三萬八千七百四十五石六斗、乙郡輸粟三萬四千九百五石六斗、丙郡輸粟二萬六千二百七十石四斗、丁郡輸粟一萬四千七十八石四斗。四郡共穿窖、上袤多於上廣一丈、少於下袤三丈、多於深六丈、少於下廣一丈。各計粟多少均出丁夫。自穿・負・築、冬程人功常積一十二尺、一日役。問窖上・下廣・袤・深、郡別出人及窖深・廣各多少。

荅曰、窖上廣八丈、上袤九丈、下廣一十丈、下袤一十二丈、深三丈。

甲郡八千七十二人、深一十二尺、下袤一十丈二尺、廣八丈八尺。

乙郡七千二百七十二人、深九尺、下袤一十一丈一尺、廣九丈四尺。

丙郡五千四百七十三（尺）〈人〉[二]、深六尺、下袤一十一丈七尺、廣九丈八尺。

丁郡二千九百三十三人、深三尺、下袤一十二丈、廣一十丈。

求窖深・廣・袤術曰、以斛法乘總粟爲積尺。又廣差乘袤差、三而一、爲隅陽冪。乃置（塹）〈截〉[三]上廣、半廣差加之、以乘（塹）〈截〉[三]上袤、爲隅頭冪。又半袤差乘（塹）〈截〉[三]上廣、以隅陽冪及隅頭冪加之、爲方法。又置（塹）〈截〉[三]上袤及（塹）〈截〉[三]上廣、幷之、爲大廣。又幷廣差及袤差、半之、以加大廣、爲廉法、從。開立方除之、即深。各加差、即合所問。

求均給積尺受廣・袤・深術曰、如築（隄）〈臺〉[四]術入之。以斛法乘甲郡輸粟爲積尺。又三因、以深冪乘之、以廣差乘袤差而一、爲實。深乘上廣、廣差而一、爲上廣之高。深乘上袤、袤差而一、爲上袤之高。上廣之高乘上袤之高、三之、爲方法。又幷兩高、三之、二而一、爲廉法、從。開立方除之、即甲深。以袤差乘之、以本深除之、所得加上袤、即甲下袤。以廣差乘之、本深除之、所得加〈上〉[五]廣、即甲下廣。若求乙・丙・丁、毎以前下廣・袤爲後上廣・袤。以次皆準此求之、即得。若求人數、各以程功約當郡積尺。

校訂：［一］「丙・丁」を脱す。銭宝琮に従い補う。

［二］「尺」は「人」の誤り。文脈により改める。

［三］本題における5ヶ所の「塹」は『緝古算経』の他の算題では「截」とされている。銭宝琮に従い改める。なお、［一〇］題の自注でも同様の誤りがある。

［四］「隄」は「臺」の誤り。李潢に従い改める。

［五］「上」字を脱す。銭宝琮に従い補う。

訓読：仮令に四郡粟を輸すに、斛法は二尺五寸[162]。一人功を作すを均と為し、上自り甲に給し、次を以て乙･丙･丁に与う。其れ甲郡の輸す粟は三万八千七百四十五石六斗、乙郡の輸す粟は三万四千九百五石六斗、丙郡の輸す粟は二万六千二百七十石四斗、丁郡の輸す粟は一万四千七十八石四斗。四郡共に窖を穿つに､上袤は上広より一丈多く、下袤より三丈少く、深より六丈多く、下広より一丈少し[163]。各おの粟の多少を計りて均しく丁夫を出だす[164]。自ら穿ち、負い、築くに、冬程の人功の常積は一十二尺、一日の役なり。問う、窖の上・下広・袤・深、郡別に出だす人及び窖の深・広は各おの多少ぞ。

答に曰う、窖の上広八丈、上袤九丈、下広一十丈、下袤一十二丈、深三丈。

甲郡八千七十二人、深一十二尺、下袤一十丈二尺、広八丈八尺。

乙郡七千二百七十二人、深九尺、下袤一十一丈一尺、広九丈四尺。

丙郡五千四百七十三人、深六尺、下袤一十一丈七尺、広九丈八尺。

丁郡二千九百三十三人、深三尺、下袤一十二丈、広一十丈。

窖の深・広・袤を求むるの術に曰う、斛法を以て総ての粟に乗じ積尺と為す[165]。又た広の差もて袤の差に乗じ､三にして一とし､隅陽冪と為す[166]。乃ち截上広を置き、広の差を半にして之に加え、以て截上袤に乗じ、隅頭冪と為す[167]。又た袤の差を半にし截上広に乗じ、隅陽冪及び隅頭冪を以て之に加え、方法と為す[168]。又た截上袤及び截上広を置き、之を并せ、大広と為す[169]。又た広の差及び袤の差を并せ、之を半にし、以て大広に加え、廉法と為し、従える[170]。開立方して之を除けば、即ち深なり[171]。各おの差を加うれば、即ち問う所に合す[172]。

均しく給する積尺を求め広・袤・深を受くる術に曰う、台を築く術の如く之を入る。斛法を以て甲郡の輸す粟に乗じ積尺と為す。又た三もて因し、深冪を以て之に乗じ、広の差を以て袤の差に乗じて一とし、実と為す[173]。深もて上広に乗じ、広の差にして一とし、上広の高と為す。深もて上袤に乗じ、袤の差にして一とし、上袤の高と為す[174]。上広の高は上袤の高に乗じ､之を三し、方法と為す[175]。又た両高を并せ、之を三し、二にして一とし、廉法と為し、従える[176]。開立方して之を除けば、即ち甲の深なり[177]。袤の差を以て之に乗じ、本との深を以て之を除し、得る所は上袤に加うれば、即ち甲の下袤なり[178]。広の差を以て之に乗じ、本との深もて之を除し、得る所は上広に加うれば、即ち甲の下広なり[179]。乙・丙・丁を求むるが若きは、毎に前の下広･袤を以て後の上広･袤と為す[180]。次を以て皆な此に準じて之を求むれば、

即ち得。人の数を求むるが若きは、各おの程功を以て当郡の積尺を約す(181)。

注：(162)「斛法」とは、１斛が何立方尺にあたるかということで、斛と立方尺の換算で用いる。『九章算術』商功章［二五］題の「委粟術」には、粟の斛法「二尺七寸」と糲米の斛法「一尺六寸二分」が用いられているが（文献14）参照)、これらは粟米の換算率５：３で換算すると同じ値である。『孫子算経』や『張丘建算経』でも、用いられる斛法は糲米のもので、『九章算術』と同じである。本題で用いられる斛法は「二尺五寸」であり、『九章算術』の粟の斛法に近いものの異なる値となっている。漢代の１尺を20cmとすると、１斛の容量は $20^3 \times 2.7 = 21600\mathrm{cm}^3$ となる。また唐代の１尺を29.5cmとすると、１斛の容量は $29.5^3 \times 2.5 \fallingdotseq 64180\mathrm{cm}^3$ となり、漢代のものの約2.97倍である。『隋書』律暦志に「開皇以古斗三升爲一升。大業初、依復古斗」とあり、隋の文帝の開皇の時に古斗３升を１升にし、煬帝の大業の初めに元に復している。さらに唐になって「小量」である古斗と「大量」である３倍量を併用した（『唐六典』巻三に「凡量、以秬黍中者容 一千二百爲龠、二龠爲合、十合爲升、十升爲斗、三斗爲大斗、十斗爲斛」）が、官では主に「大量」を用い、民間でも徐々に「大量」に切り替わったというのが 研究者の一致する意見である（丘光明等『中国科学技術史　度量衡巻』pp.335-336、科学出版社)。１斛は大斗10斗、すなわち古斗30斗で、斛法の約３倍の違いはこれで理解される。

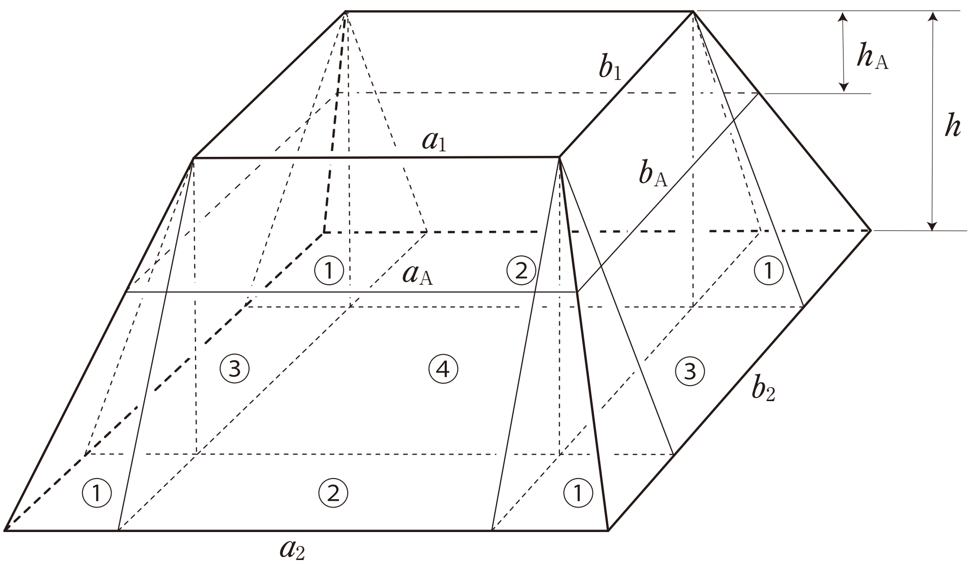

図６－１

(163) 本題は図 6 − 1 のような穀物収蔵用の穴倉から、郡で分担して粟を運び出すとき、穴倉の寸法と各郡の人数および担当する部分の寸法を求める算題である。ここで、穴倉の上広を a_1、上袤を b_1、下広を a_2、下袤を b_2 とし、深さを h とすると、最も小さい寸法は深さ h であり、後の計算ではこの h の 3 次方程式を解くことになる。ここで述べられる形状の条件は、尺を単位として

　　（上袤と上広の差）$b_1-a_1=10$,　「袤差」$b_2-b_1=30$,

　　「截上袤」$b_1-h=60$,　　　　（下広と上袤の差）$a_2-b_1=10$

である。「広差」$a_2-a_1=(a_2-b_1)+(b_1-a_1)=10+10=20$ や「截上広」$a_1-h=(b_1-h)-(b_1-a_1)=60-10=50$ もわかっている。「截上袤」、「截上広」については、後注 (167) 参照。

(164)「丁夫」は徴発された労働者。「均しく出だす」とは、粟を掘り、運搬し、積み上げるという異なった労働の量を、運搬する粟の量に換算して、どの丁夫も同じ量するということである。

(165) 積尺を V 立方尺とすると、$V=\left(38745\frac{6}{10}+34905\frac{6}{10}+26270\frac{4}{10}+14078\frac{4}{10}\right)\times 2\frac{5}{10}=285000$ であり、これが図 6 の立体の総体積である。本題の立体の形状は、二題と同じく四角錐台であるが、上広と高の大小が逆であるため、分割の仕方に少し差がある。以下では、図 6 の①～④を底面とする部分に分けて考える。

(166) 図 6 の①の上の部分は 4 つあり、合わせると四角錐になる。その体積は

$$\frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{3}h=\frac{20\times 30}{3}h=200h$$

であるが、この h の係数が「隅陽冪」である。

(167)「截上広」は上広 a_1 を求める深さ h で切った残り、すなわち $a_1-h=50$ であり、同様に「截上袤」は上袤 b_1 を深さ h で切った残り $b_1-h=60$ である（注 (163) 参照）。図 6 の②の上の部分は 2 つあり、合わせると三角柱になる。その体積は

$$\frac{(a_2-a_1)b_1}{2}h=\frac{(a_2-a_1)((b_1-h)+h)}{2}h=\frac{(a_2-a_1)(b_1-h)}{2}h+\frac{(a_2-a_1)}{2}h^2$$

である。③の上の部分も 2 つあり、合わせると三角柱になる。その体積は

$$\frac{(b_2-b_1)a_1}{2}h=\frac{(b_2-b_1)((a_1-h)+h)}{2}h=\frac{(b_2-b_1)(a_1-h)}{2}h+\frac{(b_2-b_1)}{2}h^2$$

である。さらに④の上の部分は直方体で、その体積は

$$\begin{aligned}a_1b_1h&=((a_1-h)+h)(b_1-h)+h)h\\&=(a_1-h)(b_1-h)h+((a_1-h)+(b_1-h))h^2+h^3\end{aligned}$$

である。②と④の上の部分について h の係数の和

$$\frac{(a_2-a_1)(b_1-h)}{2}=(a_1-h)(b_1-h)=\frac{20\times 60}{2}+50\times 60=3600$$

が「隅頭冪」である。

(168) ③の上の部分の体積で h の係数となるのは

$$\frac{(b_2-b_1)(a_1-h)}{2}=\frac{30\times 50}{2}=750$$

であるから、方法は、これと「隅陽冪」「隅頭冪」の和 750＋200＋3600＝4550 となる。

(169) ④の上の部分の体積で h^2 の係数が「大広」であり、その値は $(b_1-h)+(a_1-h)=60+50=110$ である。

(170) ②と③の上の部分の体積で h^2 の係数は $\frac{(a_2-a_1)+(b_2-b_1)}{2}=\frac{20+30}{2}=25$ であるから、廉法はこれと「大広」との和 25＋110＝135 となる。

(171) 以上より、深さ h についての3次方程式

$$h^3+135h^2+4550h=285000$$

を解けば $h=30$ が求まる。

(172) 他の部分の寸法も、差を加えていけば求められる。すなわち

$$a_1=(a_1-h)+h=50+30=80$$
$$a_2=(a_2-a_1)+a_1=20+80=100$$
$$b_1=(b_1-h)+h=60+30=90$$
$$b_2=(b_2-b_1)+b_1=30+90=120$$

である。

(173) 甲郡の担当部分の高さを h_A とする。h_A を求める問題は、二題で乙高を求めたときと全く同じである。文献16) 注 (57) 参照。甲郡の積尺を V_A 立方尺とすると、$V_A=38745\frac{6}{10}\times 2\frac{5}{10}=96864$ である。したがって $\frac{3V_Ah^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}=\frac{3\times 96864\times 30^2}{20\times 30}=435888$ が実である。

(174)「上広の高」は、図6－2のように、上広 a_1 と下広 a_2 を平行辺とし、高さ h の台形を上に延長して三角形にするとき、上広の上に立つ三角形の高さのこと（文献16) 注 (58) 参照）。これを h_a とすると、$h_a=\frac{a_1h}{a_2-a_1}=\frac{80\times 30}{20}=120$ である。同様に「上袤の高」は、上袤 b_1 と下袤 b_2 を平行辺とし、高さ h の台形を上に延長して三角形にするとき、上袤の上に立つ三角形の高さのこと（文献16) 注 (59) 参照）。これを h_b とすると、

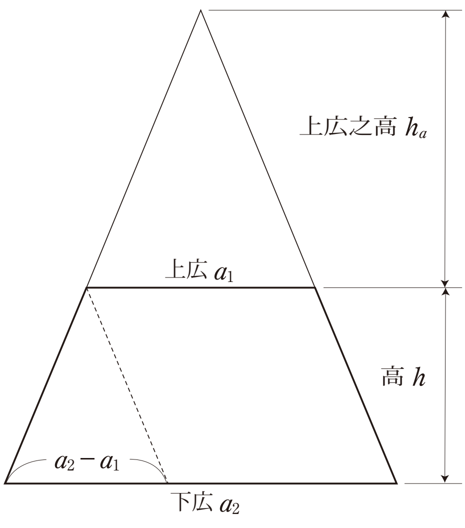

図6－2

$h_b = \dfrac{b_1 h}{b_2 - b_1} = \dfrac{90\times 30}{30} = 90$ である。

(175)「方法」は上記2つの高の積の3倍で、$3h_a h_b = 3\times 120\times 90 = 32400$ である。文献16) 注 (60) 参照。

(176)「廉法」は上記2つの高の和の$\dfrac{3}{2}$倍で、$\dfrac{3}{2}(h_a + h_b) = \dfrac{3}{2}\times(120+90) = 315$ である。文献16) 注 (61) 参照。

(177) 以上より、3次方程式

$$h_A{}^3 + 315h_A{}^2 + 32400h_A = 435888$$

を解けば、$h_A = 12$ が求まる。

(178) 文献16) 注 (64) と同様に、甲郡の下袤 b_A は $b_A = \dfrac{h_A}{h}(b_2 - b_1) + b_1$ $= \dfrac{12}{30}\times 30 + 90 = 102$ と求まる。

(179) 文献16) 注 (65) と同様に、甲郡の下広 a_A は $a_A = \dfrac{h_A}{h}(a_2 - a_1) + a_1$ $= \dfrac{12}{30}\times 20 + 80 = 88$ と求まる。

(180) 甲郡に続いて、乙・丙・丁と担当するのだから、たとえば乙郡であれば、その前の甲郡の下広 a_A や下袤 b_A を、続く乙郡の上広や上袤にすればよいということである。

(181) 程功と人数との積が積尺であるから、各郡の人数を求めるには積尺を程功で割ればよいということである。

訳：仮に四郡が粟を運ぶのに、斛法は2尺5寸とし、各人がなす仕事量は均しくし、上から甲に割り当てて、順番に乙・丙・丁に割り当てる。甲郡の運ぶ粟は38745石6斗、乙郡の運ぶ粟は34905石6斗、丙郡の運ぶ粟は26270石4斗、丁郡の運ぶ粟は14078石4斗。4郡は共同して穴倉を穿つが、上袤は上広より1丈大きく、下袤より3丈小さく、深さより6丈大きく、下広より1丈小さい。各郡は粟の量を計って、丁夫を均等に出す。各自が掘り、負い、積み上げる量は、冬の労働規程における仕事量で12立方尺であり、それが1日の労役である。問う、穴倉の上広・下広・袤・深さと、郡ごとに出す人数および穴倉の深さ・広さはそれぞれどれほどか。

答にいう、穴倉の上広8丈、上袤9丈、下広10丈、下袤12丈、深さ3丈。

甲郡は8072人で、深さ12尺、下袤10丈2尺、広さ8丈8尺。

乙郡は7272人で、深さ9尺、下袤11丈1尺、広さ9丈4尺。

丙郡は5473人で、深さ6尺、下袤11丈7尺、広さ9丈8尺。

丁郡は2933人で、深さ3尺、下袤12丈、広さ10丈。

穴倉の深・広・袤を求める術にいう、斛法を総粟量に掛けて積尺とする。また広の

差を袤の差に掛けて、3で割って、隅陽冪とする。そこで截上広を置いて、広の差を半分にしてこれに加え、截上袤に掛けて、隅頭冪とする。また袤の差を半分にして截上広に掛けて、隅陽冪および隅頭冪をこれに加え、方法とする。さらに截上袤および截上広を置いて、これらを併せて、大広とする。さらに広の差および袤の差を併せて、それを半分にし、大広に加え、廉法とし、従える。開立方してこれを除けば、それが深さである。それぞれの差を加えれば、ただちに題意をみたす。

均しく割り当てる積尺を求め広・袤・深を授ける術にいう、台を築く術のように計算する。斛法を甲郡の運ぶ粟に掛けて積尺とする。さらに3倍し、深さの2乗をこれに掛けて、広の差と袤の差を掛けたもので割って、実とする。深さを上広に掛け、広の差で割ったものを、上広の高とする。深さを上袤に掛け、袤の差で割ったものを、上袤の高とする。上広の高を上袤の高に掛けて、3倍し、方法とする。また両高を併せ、3倍し、2で割って、廉法とし、従える。開立方してこれを除けば、それが甲の深さである。袤の差をこれに掛けて、元の深さで割って、得られた数を上袤に加えれば、それが甲の下袤である。広の差をこれに掛けて、元の深さで割って、得られた数を上広に加えれば、それが甲の下広である。乙・丙・丁を求めるには、常に前の下広・下袤を後の上広・上袤とする。順番にどれもこれに準じて下広や下袤を求めれば、ただちに得られる。人の数を求めるときは、程功でそれぞれの郡の積尺を割るのである。

[七]假令亭倉、上小、下大、上下方差六尺、高多上方九尺、容粟一百八十七石二斗。今已運出五十石四斗。問倉上・下方、高及餘粟深・上方各多少。
荅曰、上方三尺、下方九尺、高一丈二尺。餘粟深・上方倶六尺。
求倉方・高術曰、以斛法乘容粟爲積尺。又方差自乘、三而一、爲隅陽冪。以乘截高、以減積、餘爲實。又方差乘截高、加隅陽冪、爲方法。又置方差、加截高、爲廉法、從。開立方除之、即上方。加差、即合所問。
求餘粟高及上方術曰、以斛法乘出粟、三之、以乘高冪、令方差冪而一、爲實[8]。高乘上方、方差而一、爲小高。令自乘、三之、爲方法。三因小高、爲廉法、從。開立方除之、得取出高。以減本高、餘即殘粟高。置出粟高、又以方差乘之、以本高除之、所得加上方、即餘粟上方[9]。

訓読：仮令に亭倉、上は小、下は大にして、上下の方の差は六尺、高は上方より九尺多く、粟を容るること一百八十七石二斗。今已に五十石四斗を運び出だす。問う、倉の上・下方、高及び余粟の深・上方各おの多少ぞ(182)。

答に曰う、上方三尺、下方九尺、高一丈二尺。余粟の深・上方は倶に六尺(183)。

倉の方・高を求むるの術(184)に曰う、斛法を以て容粟に乗じて積尺と為す(185)。又た方の差は自乗し、三にして一とし、隅陽冪と為す(186)。以て截高に乗じ、以て積より減じ、余りを実と為す(187)。又た方の差は截高に乗じ、隅陽冪に加え、方法と為す(188)。又た方の差を置き、截高に加え、廉法と為し、従える(189)。開立方して之を除けば、即ち上方(190)。差を加うれば、即ち問う所に合す(191)。

余粟の高及び上方を求むるの術(192)に曰う、斛法を以て出だす粟に乗じ、之を三し、以て高の冪に乗じ、方の差の冪をして一とせしめ、実と為す(193)。高もて上方に乗じ、方の差にして一とし、小高と為す(194)。自乗し、之を三さしめ、方法と為す(195)。三もて小高に因し、廉法と為し、従える(196)。開立方して之を除けば、取り出だす高を得(197)。以て本の高より減ずれば､余は即ち残りし粟の高(198)。出だしし粟の高を置き、又た方の差を以て之に乗じ、本の高を以て之を除き、得る所は上方に加うれば、即ち余粟の上方(199)。

注：(182)「亭倉」は方亭（正四角錘台）形の倉。図７－１参照。下方 a 尺、上方 b 尺、高さ h 尺とするとき、$a-b=6, h-b=9$ である。また、この倉に187石２斗の粟が入っている。ここから50石４斗の粟を取り出す。このとき、倉の上・下方、高さと残った粟の高さ、残った粟の上方を求める算題である。

(183) 注（190）で述べる計算により $b=3$ が得られる。これより $a=9, h=12$ となる。また取り出した粟の高さを g とすると、注（197）の３次方程式を解いて $g=6$ となる。したがって、残った粟の高さは $h-g=6$ となる。さらに、注（199）のように残った粟の上方 $c=6$ が得られる。

(184) 方亭の体積 V を求める公式は、『九章算術』商功章［一〇］題で

$$V=\frac{(a^2+b^2+ab)h}{3}$$

で与えられる。

図７－２で示される点線に沿って方亭を分割し、得られた部分の体積をA, B, Cとすると、

$$\begin{aligned}V&=4\times A+4\times B+C\\&=4\times\frac{(a-b)^2}{12}h+4\times\frac{(a-b)b}{4}h+b^2h\\&=\frac{(a-b)^2}{3}h+(a-b)bh+b^2h\end{aligned}$$

と表される。

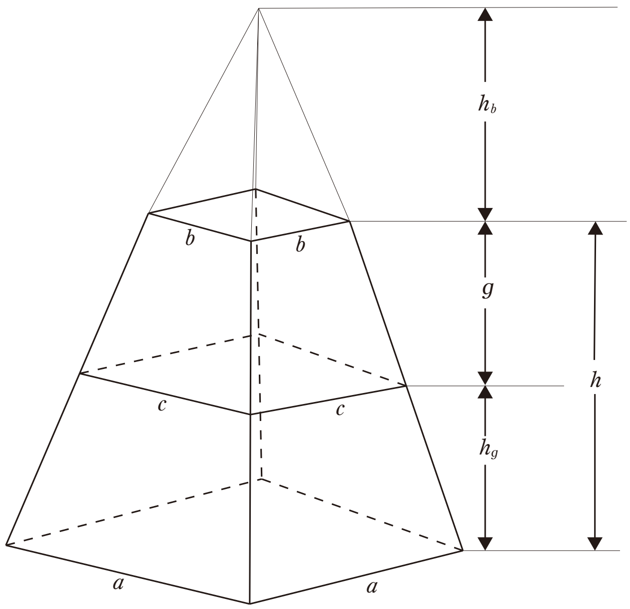

図７－１

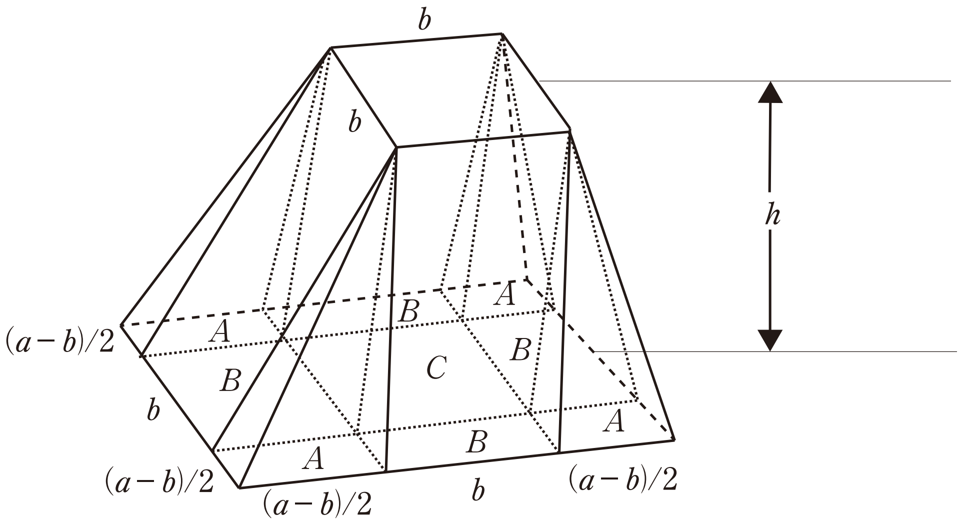

図７－２

(185) 斛法は 1石 $= 2\frac{5}{10}$ 立方尺。ここでは、倉に入っている粟は187石2斗であるので、$V = 187\frac{2}{10} \times 2\frac{5}{10} = 468$ 立方尺。

(186)「方の差」は倉の下方から上方を引いた長さ $a-b$。また「隅陽冪」K とは注(184)の式の $4 \times A$ の部分の h の係数

$$K=\frac{(a-b)^2}{3}=\frac{6^2}{3}=12$$

のこと。ここで隅陽冪を用いて方亭の体積 V を表すと

$$V=Kh+(a-b)hb+hb^2$$

となる。

(187)「截高」は倉の高さから求める上方を引いた長さ $h-b$。截高が既知なので、$h=(h-b)+b$ を用いて前注の V をさらに分割すると、

$$\begin{aligned} V&=K(h-b)+Kb+(a-b)(h-b)b+(a-b)b^2+(h-b)b^2+b^3 \\ &=b^3+[(a-b)+(h-b)]b^2+[(a-b)(h-b)+K]b+K(h-b) \end{aligned}$$

となり、したがって上方 b の3次方程式

$$b^3+[(a-b)+(h-b)]b^2+[(a-b)(h-b)+K]b=V-K(h-b)$$

が得られる。

「以て截高に乗じ、以て積より減じ、余りを実と為」す計算は、

$$V-K(h-b)=468-12\times 9=360$$

であり、実は360である。

(188)「方の差を截高に乗じ、隅陽冪を加え、方法と為」す計算は、

$$(a-b)(h-b)+K=6\times 9+12=66$$

であり、方法は66である。

(189)「方の差を置き、截高に加え、廉法と為」す計算は、

$$(a-b)+(h-b)=6+9=15$$

であり、廉法は15である。

(190)得られた実、方法、廉法による3次方程式

$$b^3+15b^2+66b=360$$

を解くと、実数解 $b=3$ を得る。

(191)注(182)より $a=b+6=9, h=b+9=12$ が得られる。ここまでが術文前半の「倉の方・高を求むるの術」となる。

(192) ここからが術文後半の「余粟の高及び上方を求むるの術」となる。倉から取り出した粟の高さを g、残った粟の上方を c とする。取り出した粟の容積 W は、注(184) と同様に

$$W=\frac{(b^2+c^2+bc)g}{3}$$

で与えられる。三角形の相似関係から図７－１の h_b を用いると

$$\frac{h}{a-b}=\frac{h_b}{b}=\frac{h_b+g}{c}$$

がなりたつ。したがって

$$b=\frac{a-b}{h}h_b,\quad c=\frac{a-b}{h}(h_b+g)$$

である。これらより自注［9］のように考え整理すると

$$\frac{3Wh^2}{(a-b)^2}=g^3+3h_bg^2+3h_b{}^2g$$

となり、g についての３次方程式が得られる。

(193) 倉から取り出した粟は50石４斗であるので $W=50\frac{4}{10}\times 2\frac{5}{10}=126$ 立方尺。したがって上注の３次方程式の左辺

$$\frac{3Wh^2}{(a-b)^2}=\frac{3\times 126\times 12^2}{6^2}=1512$$

を求めて実とする。

(194) 図７－１で示される h_b をここでは「小高」と呼んでいる。小高は「高もて上方に乗じ、方の差にして一とし」て求められるので、

$$h_b=\frac{bh}{a-b}=\frac{3\times 12}{6}=6$$

である。

(195)「自乗し、之を三し、方法と為さしむ」の計算は、$3h_b{}^2=108$ を求めて方法としている。

(196)「三もて小高に因し、廉法と為し」の計算は、$3h_b=18$ を求めて廉法としている。

(197) 得られた実、方法、廉法による３次方程式

$$g^3+18g^2+108g=1512$$

を解くと、実数解 $g=6$ を得る。

(198) 取り出した残りの粟の高さは $h-g=6$ である。

(199) 三角形の相似関係より

$$\frac{c-b}{g}=\frac{a-b}{h}$$

が成り立つので、これより

$$c=\frac{g(a-b)}{h}+b=\frac{6\times 6}{12}+3=6$$

が得られる。

訳：仮に亭倉（正四角錐台）の倉があり、上部は小さく、下部は大きい。上・下部の正方形の一辺の差は６尺、高さは上辺より９尺多く、粟が187石２斗入っている。今すでに50石４斗が運び出された。問う、倉の上・下辺の長さと高さ、および残った粟の深

さ、上の正方形の一辺は各々いくらか。

答にいう、上方は3尺、下方は9尺、高さは1丈2尺。残った粟の深さ、上の正方形の一辺はともに6尺。

倉の一辺と高さを求める術にいう、斛法を容れた粟の量に掛けて積尺とする。また上下の辺の差を自乗し、3で割って、隅陽冪とする。これを截高に掛け、倉の積尺から引いて、残りを実とする。また上下辺の長さの差を截高に掛け、隅陽冪に加え、方法とする。また上下の辺の差を置き、截高に加え、廉法として、従える。開立方してこれを除けば、上辺の長さを得る。これに差を加えれば、題意を満たす。

残りの粟の高さと上辺を求める術にいう、斛法を取り出した粟に掛け、これを3倍し、高さの平方に掛け、方の差の平方で割ると、実とする。高さを上方に掛け、方の差で割ったものを小高とする。小高を自乗して、3倍して方法とする。3を小高に掛けて廉法とし、従える。開立方してこれを除けば、粟を取り出した粟の高さを得る。（この高さを）元の高さから引けば、余りは残った粟の高さとなる。出した粟の高さを置き、方の差を掛け、元の高さよりこれを引き、得られた値を上辺に加えれば、残った粟の上辺が得られる。

[8]此是大小高各自乗又相乗、各乗取高。是大高者、即是取高與小高幷。

訓読：此れ是れ大小の高は各の自乗し又た相乗じ、各の取りし高に乗ず。是れ大高なるは、即ち是れ取りし高と小高の并なり(200)。

注：(200) 取り出した粟の高さ g と小高 h_b を加えたものを「大高」と呼んでいる。すなわち大高 h_c について

$$h_c = g + h_b$$

がなりたっている。ここでは注 (202) で述べる3次方程式の右辺 $g(h_c^2 + h_b^2 + h_c h_b)$ の計算について述べている。

訳：これは実は大小の高の自乗と相乗を、それぞれ取り出した粟の高さに掛けたものだからである。この大高というのは、取り出した粟の高さと小高を合わせたものである。

[9]此本術曰、「上下方相乗、又各自乗、幷、以高乗之、三而一」。今還元、三之、又高冪乗之、差冪而一、得大小高相乗、又各自乗之數。何者、若高乗下方、方差而一、得大高也。若高乗上方、方差而一、得小高也。然則斯本下方自乗、故須高〈冪〉[一]乗之、差自乗而一、即得大高自乗之數。小高亦然。凡大高者、即是取高與小高幷、相連。今大高自（陳）〈乗〉[二]爲大方。大方之內即有取高自乗冪一、隅頭小高自乗冪一。又其兩邊各（一）〈有〉[三]以取

高乘小高爲冪二。又大小高相乘爲中方。中方之內即有小高乘取高冪一。又小高自乘即是小方之冪又一。則小高乘大高、又各自乘三等冪、皆以乘取高爲立積。故三因小冪爲方、及三小高爲廉也。

校訂：[一]「冪」字を脱す。李潢に従い補う。

[二]「陳」は「乘」の誤り。孔刻本に従って改める。

[三] 銭宝琮に従って「一」を「有」に改める。

訓読：此の本術に曰う、「上下の方は相乘じ、又た各の自乗し、并せ、高を以て之に乗じ、三にして一とす」(201)。今元に還り、之を三し、又た高の冪を之に乗じ、差の冪にして一とすれば、大小の高の相乗、又た各の自乗の数を得(202)。何となれば、若し高もて下方に乗じ、方の差にして一とすれば、大高を得る也。若し高もて上方に乗じ、方の差にして一とすれば、小高を得る也(203)。然らば則ち斯れ本の下方の自乗なり、故に高の冪を須(もち)いて之に乗じ、差の自乗にして一とすれば、即ち大高自乗の数を得。小高も亦た然り(204)。凡そ大高なるは、即ち是れ取りし高と小高の并にして、相い連なる(205)。今大高の自乗を大方と為す。大方の内に即ち取りし高の自乗の冪一、隅頭の小高自乗の冪一有り。又た其の両辺に各おのの取りし高を以て小高に乗じて冪二と為す有り(206)。又た大小の高相乗じて中方と為す。中方の内に即ち小高もて取りし高に乗ずるの冪一有り。又た小高の自乗は即ち是れ小方の冪又た一なり(207)。則ち小高もて大高に乗じ、又た各の自乗せし三等の冪は、皆取りし高に乗ずるを以て立積と為す(208)。故に三もて小冪に因するを方と為し、及び小高を三するを廉と為す也(209)。

注：(201)「本術」とは『九章算術』商功章［一〇］題の方亭の体積を求める術を指す。注 (192) 参照。

(202) 注 (192) の 3 次方程式の実について、

$$\frac{3Wh^2}{(a-b)^2}=gh_c{}^2+gh_b{}^2+gh_ch_b$$

がなりたつことをいう。

(203) 大高 h_c と小高 h_b が

$$h_c=\frac{ch}{a-b},\quad h_b=\frac{bh}{a-b}$$

で与えられることをいう。注 (194), (200) 参照。

(204) 上注より

$$\frac{c^2h^2}{(a-b)^2}=h_c{}^2,\quad \frac{b^2h^2}{(a-b)^2}=h_b{}^2$$

が得られることをいう。

(205) $h_c=g+h_b$ がなりたつことをいう。注 (200) 参照。

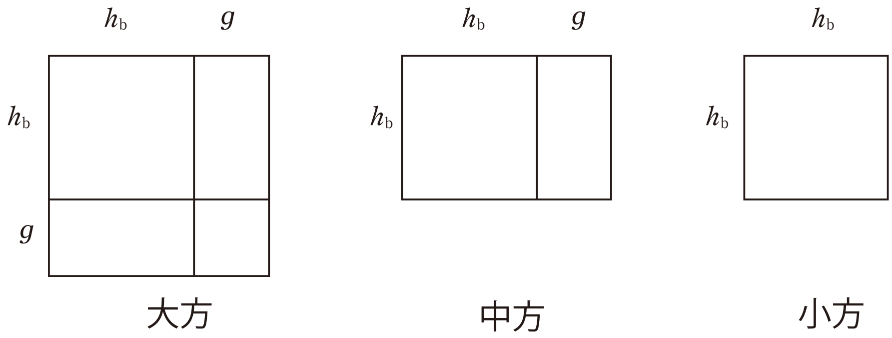

図 7－3

（206）図 7－3 のように大広 $h_c=h_b+g$ を一辺とする正方形（大方）を作る。大方の中は 4 つの部分に分かれ、一辺 g の正方形が 1 つ、小高 h_b が一辺の正方形（小方）が 1 つ、g と h_b を二辺とする長方形が 2 つできる。すなわち $h_c{}^2=g^2+h_b{}^2+2h_bg$ だということである。

（207）大高 h_c と小高 h_b を二辺とする長方形（中方）の中には、g と h_b を二辺とする長方形と h_b が一辺の正方形（小方）が 1 つずつできる。すなわち $h_ch_b=h_bg+h_b{}^2$ だということである。

（208）上注（206),(207）により、$h_c{}^2+h_b{}^2+h_ch_b=g^2+3h_bg+3h_b{}^2$ がなりたつ。したがって注（202）より注（192）の 3 次方程式

$$\frac{3Wh^2}{(a-b)^2}=g^3+3h_bg^2+3h_b{}^2g$$

を得る。

（209）上注の 3 次方程式において $3h_b{}^2$ が方法であり、$3h_b$ が廉法であるということである。

訳：この元の術にいう、「上・下辺を掛け、また各々を自乗し、これらを合わせ、高さをこれに掛け、3 で割る」。今元に戻って、これを 3 倍し、また高さの平方をこれに掛け、差の平方で割ると、大高と小高の掛けたもの、また各々の自乗した数が得られる。なぜならば、もし高さを下辺に掛け、方の差で割ると、大高が得られるからである。もし高さを上辺に掛け、方の差で割ると、小高が得られるからである。元の下方の自乗に高さの平方をこれに掛け、（方の）差の自乗で割ると、大高の自乗の数を得る。小高もまたそうである。大高というものは、取り出した高さと小高を合わせて、それを繋げたものである。今大高の自乗は「大方」になる。大方の中には取り出した（粟の）高さの自乗の正方形が 1 つ、隅頭にある小高の自乗の正方形が 1 つ有る。またその両辺に各々が取りだした高さと小高になる長方形が 2 つある。また大高と小高を掛ける

と「中方」になる。中方の中には小高と取り出した高さを掛けた長方形が1つある。また小高の自乗、すなわち「小方」と同じ正方形がもう1つできる。小高を大高に掛けたもの、また各々の自乗した3種類の面積はどれも取り出した高さに掛ければ体積となる。ゆえに3を小高の羃に掛けるのは方法となり、および小高を3倍するのは廉法となる。

［八］假令芻甍上袤三丈、下袤九丈、廣六丈、高一十二丈。有甲縣六百三十二人、乙縣二百四十三人。夏程人功（當）〈常〉[一] 積三十六尺、限八日役、自穿・築、二縣共造。今甲縣先到。問自下給高・廣・袤各多少。
荅曰、高四丈八尺、上廣三丈六尺、袤六丈六尺。
求甲縣均給積尺受廣・袤術曰、以程功乘乙縣人數、又以限日乘之、爲積尺。以六因之、又高冪乘之、又袤差乘廣而一、所得、又半之爲實。高乘上袤、袤差而一、爲上袤之高。三因上袤之高、半之爲廉法、従。開立方除之、得乙高。以減甍高、餘即甲高。求廣・袤、依率求之[10]。

校訂：［一］「當」は「常」の誤り。孔刻本に従って改める。

訓読：仮令に芻甍の上袤三丈、下袤九丈、広六丈、高一十二丈(210)。甲県六百三十二人、乙県二百四十三人有り。夏程の人功は常積三十六尺、八日の役に限り、自ら穿ち・築き、二県共に造る(211)。今甲県先に到る。問う、下自り給せる高・広・袤は各の多少ぞ(212)。

答に曰う、高四丈八尺、上広三丈六尺、袤六丈六尺。

甲県の均しく給せる積尺を求めて広・袤を受(さず)くるの術に曰う、程功を以て乙県の人数に乗じ、又た限日を以て之に乗じて、積尺と為す(213)。六を以て之に因し、又た高の冪もて之に乗じ、又た袤の差もて広に乗じて一とし、得る所、又た之を半にして実と為す(214)。高もて上袤に乗じ、袤の差もて一とし、上袤の高と為す(215)。三もて上袤の高に因し、之を半にし廉法と為し、従える(216)。開立方して之を除けば、乙の高を得(217)。以て甍の高より減ずれば、余は即ち甲の高(218)。広・袤を求むるは、率に依りて之を求む(219)。

注：(210)「芻甍」は『九章算術』商功章［一八］題参照。図8の芻甍において、上袤 $l_1=30$, 下袤 $l_2=90$, 広 $b=60$, 高 $h=120$ である。

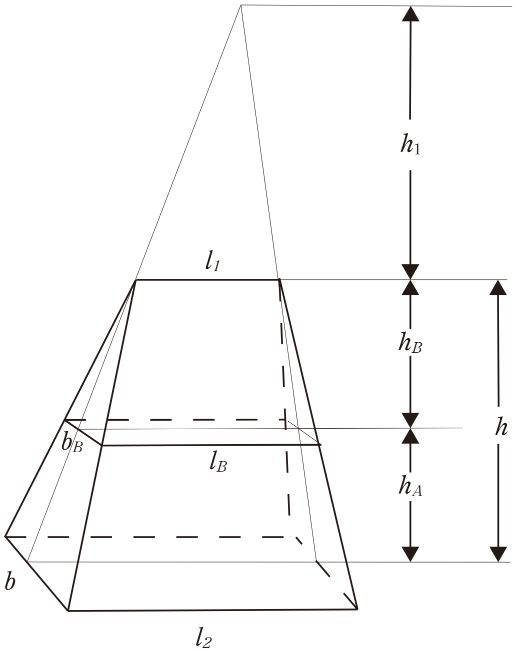

図 8

(211) 甲県632人、乙県243人が、夏程の人功１日１人36立方尺でそれぞれ８日間につき従事する。

(212) 甲県が先に到着し芻甍下部の築造を担当する。後から来た乙県が上部を担当する。

(213) 乙県が担当する上部の芻甍の体積を V_B とする。注（211）より、

$$V_B = 243 \times 8 \times 36 = 69984$$

が得られる。

(214)『九章算術』商功章［一八］題から芻甍の体積を求める公式に当てはめると、上部の芻甍の下広 b_B 、下袤 l_B 、高 h_B に対して、

$$V_B = \frac{(2l_B + l_1)\,b_B h_B}{6}$$

がなりたつ。ここで三角形の比例関係より、

$$\frac{b_B}{b} = \frac{h_B}{h}$$

なので、

$$b_B = \frac{h_B}{h}b$$

を用いて上式を変形すると、

$$V_B = \frac{(2l_B + l_1)\,b h_B{}^2}{6h}$$

が得られる。また図８の h_1 を用いて三角形の比例関係を表すと

$$\frac{l_1}{h_1}=\frac{l_B-l_1}{h_B}=\frac{l_2-l_1}{h}$$

がなりたつ。ゆえに

$$2l_B+l_1=2(l_B-l_1)+3l_1=2\frac{h_B}{h_1}l_1+3\frac{h_1}{h_1}l_1$$
$$=\frac{l_1}{h_1}(2h_B+3h_1)=\frac{l_2-l_1}{h}(2h_B+3h_1)$$

なので、

$$V_B=\frac{bh_B{}^2}{6h}\times\frac{l_2-l_1}{h}(2h_B+3h_1)$$
$$=\frac{(l_2-l_1)b}{6h^2}(2h_B{}^3+3h_1h_B{}^2)$$

が得られる。この式を h_B について整理すると

$$2h_B{}^3+3h_1h_B{}^2=\frac{6V_Bh^2}{(l_2-l_1)b}$$

を得る。自注［10］で述べるように、$h_B{}^3$ の係数を１とするには両辺を２で割らねばならない。これによって目的とする３次方程式

$$h_B{}^3+\frac{3}{2}h_1h_B{}^2=\frac{6V_Bh^2}{2(l_2-l_1)b}$$

が得られる。注 (223) 参照。この３次方程式の実は

$$\frac{6V_Bh^2}{2(l_2-l_1)b}$$

であり、これが「六を以て之に因し、又た高の冪もて之に乗じ、又た袤の差もて広に乗じて一とし、得る所、又た之を半にして実と為」すにあたる。ここでは、

$$\frac{6V_Bh^2}{2(l_2-l_1)b}=\frac{6\times69984\times120^2}{2\times(90-30)\times60}=839808$$

となる。

(215)「上袤の高」とは図８の h_1 のこと。「高もて上袤に乗じ、袤の差もて一とし、上袤の高と為」すのように求められ、ここでは

$$h_1=\frac{l_1h}{l_2-l_1}=\frac{30\times120}{90-30}=60$$

となる。

(216) 注 (214) の３次方程式の $h_B{}^2$ の係数 $\frac{3}{2}h_1$ を廉法とする。これが「三もて上袤の高に因し、之を半にし、廉法と為」すにあたる。ここでは、

$$\frac{3}{2}h_1=\frac{3}{2}\times60=90$$

となる。

(217) 得られた実と廉法による３次方程式

$$h_B{}^3+90h_B{}^2=839808$$

を解くと、実数解 $h_B=72$ を得る。

(218) 前注で得られた h_B より、甲の高を求めると

$$h_A = h - h_B = 120 - 72 = 48$$

を得る。

(219) 上広と袤を求めると

$$b_B = \frac{h_B}{h} b = \frac{72}{120} \times 60 = 36,$$
$$l_B = \frac{h_B l_1}{h_1} + l_1 = \frac{72 \times 30}{60} + 30 = 66$$

を得る。

訳：仮に芻甍の上袤が３丈、下袤９丈、広６丈、高12丈とする。甲県が632人、乙県が243人いる。夏程の人功は常積36尺、８日間に限った労役で、自ら穿ち・築き、二県で共同して芻甍を造る。今甲県が先に到着した。問う､下部より供給する（芻甍の）高･広･袤は各々いくらか。

答にいう、高さは４丈８尺、上広は３丈６尺、袤は６丈６尺。

甲県の均等に供給する積尺を求めて広・袤を授ける術にいう、程功を乙県の人数に掛け、また期限の日数をこれに掛けて積尺とする。６をこれに掛け、また高さの平方をこれに掛け、また上下の袤の差を広に掛けたもので割り、得た数をさらに半分にして実とする。高さを上袤に掛け、袤の差で割り、上袤の高さとする。３を上袤の高さに掛け、これを半分にし廉法として、従える。開立方してこれを除けば、乙の高さを得る。芻甍の高さから引けば、残りは甲の高さ。広・袤を求めるには、比率によってこれを求める。

[10]此乙積本倍下袤、上袤從之、以下廣及高乘之、六而一、爲一甍積。今還元、須六因之、以高冪乘之、爲實、(乘)[一]袤差乘廣而一。得取高自乘、以乘（二）〈三〉[二]上袤之高、(幷大廣袤相連之數)[三]則三小高爲廉法。各以取高爲方。仍有取高爲立方者〈二〉[四]、故半之爲立方一、又須半廉法。

校訂：[一]「乘」字は衍字。李潢に従って削る。

[二] 各本「二」とするが李潢に従って「三」に改める。

[三]「幷大廣袤相連之數」の八字は衍字。李潢に従って削る。

[四] 各本「二」字を脱すが李潢に従って補う。

訓読：此の乙の積は本と下袤を倍し、上袤は之に従（くわ）え、下広及び高を以て之に乗じ、六にして一とし、一甍の積と為す(220)。今元に還すに、須らく六もて之に因し、高の冪を以て之に乗じ、実と為し、袤の差もて広に乗じて一とす(221)。取りし高の自乗を

得て、以て三を上袤の高に乗ずれば、則ち小高を三するを廉法と為す(222)。各の取りし高を以て方と為す。仍お取りし高は立方の二と為す有り、故に之を半にするは立方の一と為し、又た須らく廉法を半にす(223)。

注：(220) 注 (214) の芻甍の体積を求める公式

$$V_B=\frac{(2l_B+l_1)\,b_Bh_B}{6}$$

が適用できることをいう。

(221) 注 (214) で与えられた h_B の 3 次方程式において

$$\frac{6V_Bh^2}{(l_2-l_1)\,b}$$

を実とする。原文では、$(l_2-l_1)b$ で割る前の $6V_Bh^2$ を実としている。

(222)「取りし高」とは h_B のこと。$h_B{}^2$ の係数、すなわち廉法が $3h_1$ になるの意。

(223) ここで得られた 3 次方程式は

$$2h_B{}^3+3h_1h_B{}^2=\frac{6V_Bh^2}{(l_2-l_1)\,b}$$

である。$h_B{}^3$ の係数を 1 にするためには両辺を 2 で割らないといけない。これですべての係数が半分になり、

$$h_B{}^3+\frac{3}{2}h_1h_B{}^2=\frac{6V_Bh^2}{2(l_2-l_1)\,b}$$

となることを述べている。

訳：この乙県の担当する芻甍の体積は元々下袤を 2 倍し、上袤をこれに加え、下広と高さをこれに掛け、6 で割れば、1 つの芻甍の体積となる。今元に戻して、6 をこれに掛け、高さの平方をこれに掛けて実とし、上下の袤の差を広に掛けてこれで割る。取った高さの自乗を得て、3 を上袤の高さに掛ければ、小高を 3 倍したものを廉法とする。各々の取った高さを一辺とする。なお取った高さを一辺とする立方体は 2 つ分なので、これを半分にすれば立方体 1 つ分になるので、そこで廉法を半分にするのである。

［九］假令圓囤、上小、下大。斛法二尺五寸。以率徑一周三。上下周差一丈二尺、高多上周一丈八尺。容粟七百五斛六斗。今已運出二百六十六石四斗。問殘粟去口・上下周・高、各多少。

荅曰、上周一丈八尺、下周三丈、高三丈六尺、去口一丈八尺、粟周二丈四尺。

求圓囤上下周及高術曰、以斛法乘容粟、又三十六乘之、三而一、爲方亭之積。又以周差自乘、三而一、爲隅陽冪。以乘截高、以減亭積、餘爲實。又周差乘截高、加隅陽冪、爲方法。又以周差加截高、爲廉法、從。開立方除之、得上周。加差而合所問。

求粟去口術曰、以斛法乘出斛、三十六乘之、以乘高冪、如周差冪而一、爲實。高乘上周、周差而一、爲小高。令自乘、三之、爲方法。三因小高、爲廉法、從。開立方除之、即去口[11]。置去口、以周差乘之、以本高除之、所〈得〉[一]加上周、即粟周。

校訂：[一]「得」字を脱すが、李潢に従って補う。

訓読：仮令に円囤、上は小にして、下は大なり(224)。斛法二尺五寸。率径一周三を以てす(225)。上下の周の差は一丈二尺、高は上周より一丈八尺多し(226)。粟を容るること七百五斛六斗。今已に二百六十六石四斗を運び出だす。問う、残る粟の去口・上下の周・高、各の多少ぞ(227)。

答に曰う、上周一丈八尺、下周三丈、高三丈六尺、去口は一丈八尺、粟の周は二丈四尺。

円囤の上下の周及び高を求むるの術(228)に曰う、斛法を以て容るる粟に乗じ、又た三十六もて之に乗じ、三にして一とし、方亭の積と為す(229)。又た周の差を以て自乗し、三にして一とし、隅陽冪と為す(230)。以て截高に乗じ、以て亭積より減じ、余りを実と為す(231)。又た周の差もて截高に乗じ、隅陽冪に加え、方法と為す(232)。又た周の差を以て截高に加え、廉法と為し、従える(233)。開立方して之を除けば、上周を得(234)。差を加えて問う所に合す(235)。

粟の去口を求むるの術(236)に曰う、斛法を以て出だす斛に乗じ、三十六もて之に乗じ、以て高の冪に乗じ、周の差の冪の如くして一とし、実と為す(237)。高もて上周に乗じ、周の差にして一とし、小高と為す(238)。自乗せしめ、之を三し、方法と為す(239)。三もて小高に因し、廉法と為し、従える(240)。開立方して之を除けば、即ち去口(241)。去口を置き、周の差を以て之に乗じ、本の高を以て之を除し、得る所は上周に加うれば、即ち粟の周(242)。

注：(224)「円囤」は正円錐台形の穀物を貯蔵する空間。形状は「円亭」と同じ。

(225) 本題では円周率を3としている。なお後題［一〇］以降では円周率を$\frac{22}{7}$としている。

(226) 図9の円囤の上周を c_1 尺、下周を c_2 尺、高さを h 尺とするとき、

$$c_2 - c_1 = 12,\quad h - c_1 = 18$$

がなりたっている。

(227) 円囤に705斛6斗が入っていたが、ここから266斛4斗が運び出された。このと

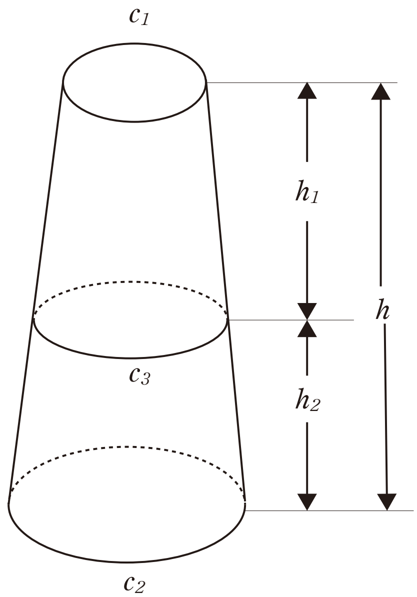

図 9

き、c_1, c_2, h に加えて、入口から残った粟までの高さの差 である「去口」h_1 と残った粟の上周 c_3 を求めている。

(228)『九章算術』商功章［一一］題の円亭の体積を求める公式から、円囤の体積を V とすると、

$$V=\frac{(c_1{}^2+c_2{}^2+c_1c_2)h}{36}$$

がなりたつ。

(229) 斛法 2 尺 5 寸で粟が705斛 6 斗入っているので、

$$V=705\frac{6}{10}\times2\frac{5}{10}=1764\text{立方尺}$$

である。ここで、上辺が c_1 尺、下辺が c_2 尺、高さが h 尺の方亭の体積を F とする。文献18) の注 (43) ではこの方亭を「大方亭」と呼んでいるが、円周率 3 のもとで大方亭 3 個分の体積が円囤36個分の体積と等しくなる。すなわち、

$$3F=36V$$

である。ゆえに、

$$F=\frac{36V}{3}$$

である。このことが「又た三十六もて之に乗じ、三にして一とし、方亭の積と為す」である。ここでは、

$$F=\frac{36\times1764}{3}=21168$$

となる。

(230)「隅陽冪」は注 (186) 参照。ここでは

$$K=\frac{(c_2-c_1)^2}{3}=48$$

となる。これが「周の差を以て自乗し、三にして一とし、隅陽冪と為す」に当たる。

(231)「截高」は注 (187) 参照。ここでは、$h-c_1=18$。注 (187) と同様にして実を求めると、

$$F-K(h-c_1)=21168-48\times 18=20304$$

が得られる。これが「以て截高に乗じ、以て亭積より減じ、余りを実と為す」に当たる。

(232) 注 (188) と同様にして方法を求めると、

$$(c_2-c_1)(h-c_1)+K=12\times 18+48=264$$

が得られる。これが「周の差もて截高に乗じ、隅陽冪に加え、方法と為す」に当たる。

(233) 注 (189) と同様にして廉法を求めると、

$$(c_2-c_1)+(h-c_1)=12+18=30$$

が得られる。これが「周の差を以て截高に加え、廉法と為し」に当たる。

(234) 得られた実、方法、廉法による3次方程式

$$c_1{}^3+30c_1{}^2+264c_1=20304$$

を解くと、実数解 $c_1=18$ を得る。

(235) 注 (226) の関係より $c_2=c_1+12=30$ と $h=c_1+18=36$ が得られる。ここまでが術文前半の「円囤の上下の周及び高を求むるの術」となる。

(236) ここからが術文後半の「粟の去口を求むるの術」となる。図9参照。上辺が c_1 尺、下辺が c_3 尺、高さが h_1 尺の方亭の体積を F_1 とし、注 (182) と同様の3次方程式を考えると、

$$h_1{}^3+3h_bh_1{}^2+3h_b{}^2h_1=\frac{3F_1h^2}{(c_2-c_1)^2}$$

がなりたつ。運び出した粟の体積を W とすると、注 (229) と同様に

$$3F_1=36W$$

なので、

$$h_1{}^3+3h_bh_1{}^2+3h_b{}^2h_1=\frac{36Wh^2}{(c_2-c_1)^2}$$

となる。

(237) 斛法1石$=2\frac{5}{10}$立方尺で、運び出した粟266斛4斗を換算すると、

$$W=266\frac{4}{10}\times 2\frac{5}{10}=666\text{立方尺}$$

である。ゆえに求める実は

$$\frac{36Wh^2}{(c_2-c_1)^2}=\frac{36\times666\times36^2}{12^2}=215784$$

で与えられる。これが「斛法を以て出だす斛に乗じ、三十六もて之に乗じ、以て高の冪に乗じ、周の差の冪の如くして一とし、実と為す」に当たる。

(238) 注 (194) と同様に小高 h_b は

$$h_b=\frac{c_1h}{c_2-c_1}=\frac{18\times36}{12}=54$$

で与えられる。これが「高を上周に乗じ、周の差にして一とし、小高と為す」に当たる。

(239) 注 (195) と同様に方法は

$$3h_b{}^2=8748$$

で与えられる。これが「自乗せしめ、之を三し、方法と為す」に当たる。

(240) 注 (196) と同様に廉法は

$$3h_b=162$$

で与えられる。これが「三もて小高に因し、廉法と為し」に当たる。

(241) 得られた実、方法、廉法による３次方程式

$$h_1{}^3+162h_1{}^2+8748h_1=215784$$

を解くと、実数解 $h_1=18$ を得る。

(242) 注 (199) と同様の相似関係により、

$$\frac{c_2-c_1}{h}=\frac{c_3-c_1}{h_1}$$

がなりたつので、

$$c_3=\frac{h_1(c_2-c_1)}{h}+c_1=24$$

が得られる。これが「去口を置き、周の差を以て之に乗じ、本の高を以て之を除し、得る所は上周に加うれば、即ち粟の周」に当たる。

訳：仮に円囤は上部が小さく、下部が大きいとする。斛法は２尺５寸。円周率は「径一周三」とする。上下の周の差は１丈２尺、高さは上周より１丈８尺長い。粟は705斛６斗入いる。今すでに266斛４斗を運び出した。問う、残った粟の去口、上下の周・高、各々いくらか。

答にいう、上周は１丈８尺、下周は３丈、高さは３丈６尺、去口は１丈８尺、粟の周は２丈４尺。

円囤の上下の周及び高を求める術にいう、斛法を入っている粟に掛け、また36をこれに掛け、３で割れば、方亭の体積となる。また周の差を２乗し、３で割り、隅陽冪とする。これを截高に掛け、方亭の体積から引き、残りを実とする。また周の差を截

高に掛け、隅陽冪を加え、方法とする。また周の差を截高に加え、廉法として、従える。開立方してこれを除けば、上周を得る。周の差を加えれば、題意を満たす。

粟の去口を求める術にいう、斛法を出す斛数に掛け、36をこれに掛け、高さの２乗に掛け、周の差の２乗で割り、実とする。高さを上周に掛け、周の差で割り、小高とする。これを自乗させ、３倍して、方法とする。３を小高に掛け、廉法として、従える。開立方してこれを除けば、去口を得る。去口を置き、周の差をこれに掛け、元の高さでこれを割り、得た値を上周に加えれば、粟の周となる。

[11]三十六乗訖、即是截方亭。（之）〈與〉[一]前方窖不別。

校訂：[一]「之」字に作るが、李潢に従って「與」に改める。

訓読：三十六もて乗じ訖れば、即ち是れ截方亭(243)。前の方窖と別ならず(244)。

注：(243)円囤36個分の体積は大方亭３個分の体積に当たる。注(229)参照。「截方亭」の「截」は「三」の誤りか。

(244)「方窖」とは方亭。「前の方窖」とは『緝古算経』［七］題に見える亭倉のこと。そこで用いられた手法がここでも適用可能であることを言っている。

訳：36を掛け終われば、これは３つの方亭である。これは前の方窖（[七]題）と違いはない。

参考文献

１）天禄琳瑯叢書『緝古算経』、郭書春主編『中国科学技術典籍通彙　数学巻１』（河南教育出版社、1993年）所収

２）王孝通『緝古算経』、孔継涵編『算経十書』所収、東北大学デジタルコレクション、藤原集書９、m01101、615-650
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100009843

３）郭書春、劉鈍点校『算経十書』所収『緝古算経』（九章出版社、2001年）

４）李潢『緝古算経考注』、郭書春主編『中国科学技術典籍通彙 数学巻 ４』（河南教育出版社、1993年）所収

５）張敦仁『緝古算経細草』、知不足斎叢書（乾隆45年（1780年））所収、国立国会図書館蔵

６）陳傑『緝古算経図解』（成都竜万育変堂、道光３年（1821年）、東北大学デジタルコレクション、藤原集書 3191、m01408、55まで
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100009839

７）陳傑『緝古算経音義』（成都竜万育変堂、道光３年（1821年））、東北大学デジタルコレクション、藤原集書 3191、m01408、56以降

https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100009839
8）Tina Su Lyn Lim, Donald B. Wagner "The Continuation of Ancient Mathematics: Wang Xiaotong's Jigu Suanjing, Algebra and Geometry in Seventh-Century China"（Nordic Inst of Asian Studies, 2017年８月）
9）大川俊隆「『張丘建算経』訳注稿（1）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編39号、2020年 ６月）
10）小寺裕、武田時昌「『九章算術』訳注稿（13）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編14号、2012年２月）
11）田村誠、吉村昌之「『九章算術』訳注稿（11）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編12号、2011年６月）
12）銭宝琮「王孝通『緝古算経』第二題・第三題術文疏証」（科学史集刊　第九期、1966年４月）、銭宝琮点校『算経十書』（中華書局、2021年１月）所収
13）小寺裕、武田時昌、張替俊夫「『九章算術』訳注稿（15）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編22号、2014年10月）
14）武田時昌、張替俊夫「『九章算術』訳注稿（16）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編23号、2015年２月）
15）張替俊夫「『九章算術』訳注稿（25）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編29号、2017年３月）
16）大川俊隆、田村誠「『緝古算経』訳注稿（1）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編44号、2022年３月）
17）田村誠「『緝古算経』訳注稿（2）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編45号、2022年７月）
18）武田時昌、田村誠「『九章算術』訳注稿（14）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編15号、2012年６月）