『緝古算経』訳注[†]稿（1）

大　川　俊　隆[†]・田　村　　誠[††]

中国古算書研究会

大川　俊隆、小寺　裕、田村　誠

馬場　理惠子、張替　俊夫

Translation and Annotation of “Continuation of Ancient Mathematics （緝古算経）” Vol. 1

OHKAWA Toshitaka, TAMURA Makoto

Abstract

“Continuation of Ancient Mathematics（緝古算経）” was written by early Tang dynasty calendarist and mathematician Wang Xiaotong a little after 626, and was listed as one of the Ten Computational Canons（算経十書）compiled during Tang dynasty. The aim of our studies is to provide a complete translation and annotation of the book based on a series of our researches on ancient Chinese mathematical books.

This is the first article, in which we treat with the preface and the problems 1 and 2.

『緝古算経』は初唐の暦学者であり数学者である王孝通によって626年より少し後に書かれたもので、唐代に編纂された算経十書中の一書である。我々の研究が目的とするのは、

[†]This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 18K00269.

† 大阪産業大学 名誉教授

†† 大阪産業大学 全学教育機構 教授

草 稿 提 出 日　11月４日

最終原稿提出日　11月15日

我々の一連の中国古算書研究を踏まえ、同書に完全な訳と注を与えることにある。

本論文はその第1号であり、前文である表、および算題［一］、［二］について扱う。

『緝古算経』の著者である王孝通の生年・没年は不明、算暦博士を経て太史丞になる。唐の官職は九品が正従に分かれ、さらに正四品以下は上下に分かれていた。太史丞は国家の天文機構の官吏で、位は低く従七品下、すなわち30階級の中で第22番目の階級である。『緝古算経』「表」の中で太史丞に任ぜられて傅仁均の戊寅暦を校勘したとあり、武徳9年（626年）では王孝通は算暦博士であったことから、『緝古算経』の成書は626年より少し後であることがわかる。

『緝古算経』の算題は全20題。その多くは立体体積問題であり、それを『九章算術』の開立方術を発展させた開帯従立方術、すなわち3次方程式の数値解法で解いている。3次方程式は25あり、また複2次式となっている4次方程式がいくつかある。これらの方程式について、王孝通自身は立式については詳しく説明を加えるものの、それを解く計算については「開立方する」とだけ述べて説明がない。したがって、3次方程式の数値解法については、『緝古算経』成立以前に確立していたことが窺える。銭宝琮はこれを『綴術』によると考えるが、『綴術』はすでに亡失してしまっているので確認できない。このように『緝古算経』は3次方程式について書かれた現在に伝わる最古のテキストとなっている。

『緝古算経』は、顕慶元年（656年）に李淳風が編纂した「算経十書」に組み入れられ、唐代の大学に相当する国子監において、同年算学館を増設し、そこで教授された。しかしながら算学博士の官位は従九品下と、国子学博士の正五品上に遠く及ばず、算学館に学ぶ学生の数も初期に30名、後に10名と、国子学など他の学館に学ぶ学生の1割以下であった。さらに算学館の中でも『綴術』『緝古算経』は上級の書とされ、『九章算術』と『海島算経』の両者を3年で学ぶとするのに対し、『綴術』は一書で4年、『緝古算経』も3年とされ、学ぶ者はさらに限られたものであった。後注（10）参照。

「算経十書」について現存する最古の版本は南宋鮑澣之刻本であり、『九章算術』であれば第5巻商功章まではこれに見ることができる。しかし『緝古算経』には南宋本は残っていない。ただ、明末清初の汲古閣主人の毛晋が康熙23年に南宋本を影写したテキストがあり、これが1932年に故宮博物院から「天禄琳琅叢書」の一として影印されている。これは文献1）に示すように『中国科学技術典籍通彙 数学巻』に収められており、我々はこのテキストを底本として用いる。この他には、戴震が汲古閣本を校勘したものがあり、1777年頃に孔継涵により刊行された微波榭本『算経十書』に収められている。清代の李潢、張敦仁、陳傑らの注釈本は、これを底本としている。また、李潢等の注釈本を総合し、かつ

校訂を加えたものが文献３）である。本稿ではこの校訂を適宜参考にする。なお李潢などの注釈本については、例えば文献４）～７）などに見ることができる。『緝古算経』の校訂や注釈など、論じたものは多数あるが、全文の現代中国語への完訳は無いようである。日本語訳も見当たらない。ただ、英文訳が近年出版されている。文献８）参照。

上『緝古算經』表

臣孝通言、臣聞、九疇載敘、紀法著於彝倫。六藝成功、數術參於造化。夫爲君上者、司牧黔首、布神道而設教、采能事而經綸。盡性窮源、莫重於算。

昔周公制禮有九數之名。竊尋九數即『九章』是也。其禮幽而微、其形祕而約。重句聊用測海、寸木可以量天。非宇宙之至精、其孰能與於此者。漢代張蒼刪補殘缺、校其條目、頗與古術不同。魏朝劉徽篤好斯言、博綜纖隱、更爲之注。徽思極毫芒、觸類增長、乃造「重差之法」、列於終篇。雖即未爲司南、然亦一時獨步。自兹厥後、不繼前蹤。賀循·徐岳之徒、王彪·甄鸞之輩、會通之數、無聞焉耳。但舊經殘駁、尚有闕漏。自劉已下更不足言。其祖暅之『綴術』、時人稱之精妙、曾不覺「方邑進行之術」全錯不通、「芻甍」「方亭」之問於理未盡。臣今更作新術、於此附伸。臣長自閭閻、少小學算、鐫磨愚鈍、迄將皓首、鑽尋祕奧、曲盡無遺。代乏知音、終成寡和。伏蒙聖朝收拾、用臣爲太史丞。比年已來、奉敕校勘傳仁均曆、凡駁正術錯三十餘道、即付太史施行。伏尋『九章』商功篇有「平地役功受袤之術」、至于上寬下狹、前高後卑、正經之內闕而不論。致使今代之人不達深理、就平正之間同欹邪之用。斯乃圓孔·方枘、如何可安。臣晝思夜想、臨書浩歎、恐一旦瞑目、將來莫覩。遂於平地之餘續狹斜之法、凡二十術、名曰『緝古』。請訪能算之人、考論得失、如有排其一字、臣欲謝以千金。輕用陳聞、伏深戰悚。謹言。

訓読：『緝古算経』を上すの表

臣孝通言う、臣聞く、九疇叙を載せ、法を紀し彝倫を著す[(1)]。六芸功を成し、数術造化に參（あづ）かる[(2)]。夫れ君上と為る者、黔首を司牧し、神道を布して教えを設け、能事を采りて経綸す[(3)]。性を尽くし源を窮むるに、算より重きは莫し。

昔周公礼を制するに九数の名有り。窃かに尋ぬるに九数は即ち『九章』是なり。其の理は幽にして微、其の形は秘にして約。重句を聊か用いて海を測り[(4)]、寸木以て天を量るべし。宇宙の至精に非ざれば、其れ孰れか能く此れに与かる者ぞ。漢代の張蒼残欠を刪補し、其の条目を校し、頗る古術と同じからず[(5)]。魏朝の劉徽篤く斯の言を好み、博く纖隠を綜（す）べ、更にこの注を為す。徽毫芒[(6)]極むるを思い、類に触れて

増長せしめ、乃ち「重差の法」を造り、終篇に列す。即ち未だ司南[7]と為さずと雖も、然れども亦一時の独歩たり。茲れより厥の後、前蹤を継がず[8]。賀循・徐岳の徒、王彪・甄鸞の輩[9]、之の数を会通するは焉を聞くなきのみ。但だ旧経残駁し、尚お闕漏有り。劉より以下は更に言うに足らず。其れ祖暅之の『綴術』[10]は、時人之を精妙と称するも、曽て「方邑進行の術」は全て錯りて通ぜず、「芻亭」「方亭」の問いは理において未だ尽くさざるを覚らず。臣今更に新術を作り、此こにおいて付伸す。

臣閭閻より長じ、少小にして算を学び、愚鈍を鐫磨し、将に晧首ならんとするに迄び、秘奥を鑽尋し、曲尽遺すなし[11]。代々知音に乏しく、終に和すること寡しと成す。伏して聖朝の収拾を蒙り、臣を用いて太史丞と為す。比年已来、勅を奉じて傅仁均の暦を校勘し、凡そ術の錯り三十余道を駁正し、即ち太史に付して施行せしむ[12]。伏して『九章』商功篇を尋ぬるに「平地役功受袤の術」有るも、上寛く下狭く、前高く後ろ卑きに至りては、正経の内に闕けて論ぜず。今代の人をして深理に達せず、平正の間に就きて欹邪[13]の用を同じくせしむるに致す。斯れ乃ち円孔・方枘[14]、如何ぞ安んずべし。臣昼に思い夜に想い、書に臨み浩嘆し、一旦瞑目すれば、将来観る莫きを恐る。遂に平地の余において狭斜の法[15]を続くること、凡そ二十術、名づけて『緝古』と曰う。請う、算を能くする人を訪ね、得失を考論し、如し其の一字を排する有れば、臣謝するに千金を以てせんと欲す[16]。軽しく用って陳聞[17]し、伏して深く戦悚す。謹みて言う。

注：（１）『尚書』「洪範」に「禹乃嗣興。天乃錫禹洪範九疇、彝倫攸敘」とある。「九疇」は、夏の禹が天帝から授けられたという天地の大法。「彝」は常、「彝倫」は人が常に守るべき道、一定不変の倫理。

（２）『周礼』大司徒「以郷三物教萬民、而賓興之。一曰六德、･･･三曰六藝。禮、楽、射、御、書、數」。「造化」は自然の理。この一つに算数が与っていることをいう。

（３）「君上」は君主。「黔首」はかぶり物のない黒い頭で、庶民の意。「能事」は、なすべき事柄。「経」は治めることで、「綸」は帯紐、天子の言葉。「経綸」は国家を統治すること。

（４）「句」は句股弦の句で、ここでは測量に用いる立表を表す。「重句」は『海島算経』の重差法のこと。

（５）「張蒼」は前漢の政治家、算書の残簡をとりまとめ、『九章算術』の原型を残したとされる。『九章算術』劉徽の序文には「漢北平侯張蒼、大司農中丞耿壽昌皆以善算命世。蒼等因舊文之遺殘、各稱刪補」とある。文献９）注（７）参照。

（6）「毫」は細い毛、「芒」は刀剣の刃先、「毫芒」は極小なものの例え。

（7）「司南」は中国古代の簡単な羅針盤、ここでは道標。

（8）「前蹤」は「先蹤」、先人の足跡、業績。ここでは『九章算術』を指す。

（9）「賀循」は西晋から東晋にかけての政治家。「徐岳」は後漢の人で、『数術記遺』の著者とされている。しかし、その内容から同書は注釈者である「甄鸞」が「徐岳」に偽託して著したとの説もある。「甄鸞」は北周の数学者で『五曹算経』『五経算術』を著した。

（10）『綴術』は算経十書中の一書。祖冲之とその子である祖暅之の作とされる。現存しないが、『新唐書』選挙志上に「凡算學、孫子・五曹共限一歳、九章・海島共三歳、張丘建・夏侯陽各一歳、周髀・五經算共一歳、綴術四歳、緝古三歳、記遺・三等數皆兼習之」とあり、唐代にはまだ存していたことがわかる。

（11）「閭閻」は村里。「鐫磨」は穿ち削ることで、削り去るの意。「皓首」は白髪頭。「曲」は細かいこと、「曲尽」で細部の意。

（12）傅仁均は『新唐書』志「曆一」に「高祖受禪、將治新曆、東都道士傅仁均善推步之學、太史令庾儉・丞傅弈薦之。詔仁均與儉等參議、合受命歳名爲戊寅元曆」とあり、王孝通がこれに異見を唱えたのは、同「曆一」に「（武德）六年、詔吏部郎中祖孝孫考其得失。孝孫使算曆博士王孝通以甲辰曆法詰之曰」云々と見える。

（13）「平正」は水平で平らな土地に置くこと。前文の「平地」「正経」を指す。「欹邪」は斜めに傾けること。

（14）「圓孔」は円形の穴、「方枘」は方形のほぞ、「圓孔・方枘」はうまくはまらないこと。

（15）「平地」は平らな土地に置かれた直方体や台形柱など『九章算術』で扱っているものを指す。「狭斜の法」とは台形柱であれば断面の台形の大きさが一定でないものや、傾斜のあるものを扱う方法をいう。

（16）秦の呂不韋が『呂氏春秋』を著したとき、都の咸陽の門に千金を置いて、一字でも添削できれば千金を与えるとした故事に倣ったもの。『史記』呂不韋列伝に「布咸陽市門、懸千金其上、延諸侯游士賓客有能增損一字者予千金」と。

（17）「陳聞」は意見を上申して聞いていただくこと、「お耳汚し」の意。

訳：『緝古算経』を奉るの表

臣孝通が申し上げます、臣が聞くところでは、天下の大法である九疇は叙を載せ、法を記して一定不変の倫理を著す。六芸は成果を成し、数術は自然の理に参与する。それ君主たる者は、民を養い治め、神明の道を拡げて教えを設け、なすべき事柄を

選び国を統治する。本性を突き詰めて源を究めるに、算より重要なものはないのであると。

昔周公が礼を定めたがその中に九数の名が有る。秘かに尋ねてみるに九数は即ち『九章』のことである。その理は幽にして微、その形は秘にして約。重差法をいささか用いて海を測り、寸木で天をも量ることができる。宇宙の至精でなければ、どれがこれに与かる者となったであろうか。漢代の張蒼は残欠を補填し､その条目を校訂し、すこぶる古術と同じではないものとした。魏朝の劉徽は篤くこの言を好み、博く細部や言外の事柄を統べ、更にこれに注を為した。徽は極小なものを思い、同類のものを伸長させ、すなわち「重差の法」を造り、最終章に列した。すなわちまだ道標となるまでではないとはいえ、それでもまた一時の図抜けた成果と言えよう。これより後、先人の行跡は継がれなかった。賀循・徐岳の徒、王彪・甄鸞の輩には、この数を理解したとは聞いたことがない。しかし、算術では古い文が残欠し、なお欠漏があるからであろう。劉より後代の者は更に言うに足りない者ばかりである。祖暅之の『綴術』は、時の人はこれを精妙と称するものであるが、これまでの「方邑進行の術」は全て誤っていて通じないし、「芻亭」「方亭」の問いは理においてまだまだ尽くしていないということをわかっていない。臣は今、更に新術を作り、ここにおいて（『九章算術』に）付け加えるものである。

臣、村里より長じ、年少にして算を学び、愚鈍を削り去り、まさに白髪頭になろうとするに及んで、秘奥を研究して、細部まで研究しつくした。代々知己に乏しく、終には和して思いを同じくする者が少なくなった。かたじけなくも聖朝に登用を賜り、臣を用いて太史丞にしていただいた。この数年来、勅命をいただいて傅仁均の暦を校勘し、全部で術の誤り30余を駁正し、太史に付して施行せしめた。謹んで『九章』商功章を尋ねると「平地役功受袤の術」があるものの、上に広く下は狭く、前が高く後ろが低いような形に至っては、『九章』の内では欠けていて論じられていない。今代の人であっても深奥の理に達することがなく、（『九章』にあるような）整った諸体積の求め方に基づいて斜めに傾けたものにも同じく用いるに至らしめている。これはすなわち円孔と方形のほぞのようなもので、どうしてはめることができるであろうか。臣昼に思い夜に想い、書に臨んでため息をつき、もし永眠すれば、将来誰も省みる者がないことを恐れる。遂に整った諸体積を求める法に対し、その余りとして狭小と傾斜のある形の法を続けること、全部で20術、名付けて『緝古』という。請うらくは、算に詳しい人を訪ね、得失を論考し、もしこの書の一字を排することがあれば、臣は謝罪するに千金をもって行いたい。軽々しく陳述して上聞したこと、伏して深く戦慄

いたします。謹んで申し上げます。

[一]假令天正十一月朔夜半、日在斗十度七百分度之四百八十。以章歳爲母、朔月行定分九千、朔日定小餘一萬、日法二萬。章歳七百、亦名行分(也)〈法〉[一]。今不取加時〈日〉[二]度。問、天正朔夜半之時、月在何處[1]。

荅曰、在斗四度七百分度之五百三十。

術曰[2]、以章歳減朔月行定分、餘以乘朔日定小餘。滿日法而一、爲先行分。不盡者、半法已上收成一、已下者棄之。若先行分滿日行分而一、爲度分、以減朔日夜半日所在度分。若度分不足減、加往宿度。其分不足減者、退一度爲行分而減之。餘即朔日夜半月行所在度及分也[3]。

校訂：［一］「也」は「法」の誤り。李潢に従い改める。

［二］「日」字を脱す。李潢に従い補う。

訓読：仮令に天正十一月(18)朔の夜半(19)、日は斗十度七百分度の四百八十に在り(20)。章歳(21)を以て母と為し、朔月の行は定分九千(22)、朔日は定小余一万、日法は二万(23)、章歳は七百、亦た行分の法と名づく(24)。今、加時の日度を取らず(25)。問う、天正朔の夜半の時、月は何処に在るや(26)。

答に曰う、斗四度七百分度の五百三十に在り。

術に曰う、章歳を以て朔月の行の定分より減じ、余は以て朔日の定小余に乗ず。満日の法にして一とし、先行の分と為す(27)。尽きざる者は、半法已上は収めて一と成し、已下なる者は之を棄つ(28)。先行の分の若きは、満日の行の分にして一とし、度・分と為し(29)、以て朔日夜半の日の所在する度・分より減ず(30)。若し度・分の減ずるに足らざれば、往宿の度を加う(31)。其の分減ずるに足らざれば、一度を退け行分と為して之より減ず(32)。余は即ち朔日夜半の月行在る所の度及び分なり。

注：(18) 冬至を含む月（子月）、その翌月（丑月）及び翌々月（寅月）は年初の正月になる資格がある。夏代には寅月を、殷代には丑月を、周代には子月を、各々正月としたとされる。この子月を正月とすることを天正という。ここでは、子月を十一月と呼んでいる。『史記』天官書に「夏正以正月、殷正以十二月、周正以十一月。蓋三王之正若循環、窮則反本」とあり、『後漢書』章帝紀「元和二年詔曰「『春秋』於春毎月書『王』者、重三正、愼三微也」」とあり、その注に「三正謂天、地、人之正」

とある。ただ、唐の高祖が即位して定められた戊寅暦において、十一月が年初の正月とされたかは不明。

(19) 朔とは、太陽と月が同じ方向、黄経の差が０度となるときをいう。ただし太陽と月の公転面には約５度の傾きがあるので日食になるとは限らない。夜半とは、子の刻（零時）を言う。「朔の夜半」とは、朔が発生するはずの日の子の刻の意である。

(20) 黄道二十八宿の各宿の基準となる星を距星という。一宿の距星からその東隣の距星までの赤道差を赤道宿度と言う。二十八宿の経度幅ははなはだ不均衡で、１度に満たない宿（觜）もあれば、30度をこえる宿（井）もある。「日は斗の十度七百分度の四百八十に在り」とは、太陽が斗宿の経度幅のうち、$10\frac{480}{700}$度の位置にいることをいう。ここで「度」は１日に太陽が黄道を進む角で、１太陽年が365.24日であるから、１「度」の角度は$\frac{360}{365.24}=0.986$である。

(21)「章歳」とは、暦作成のさまざまな定数のもっとも基本となる定数で、太陽の１日の行分を表す率である。『新唐書』暦志一に唐初に施行された戊寅暦の一連の定数が載るが、その最初に「章歳：六百七十六。亦名行分法」とあり、この算題でもすぐ後ろに「章歳は七百､亦た行分の法と名づく」とある。戊寅暦の「六百七十六」と少し差があるが、陳杰の『緝古算音義』にはこれを「成数を挙ぐる也」と、おおよその数字を挙げたのだとしている。

(22) 朔から次の朔までの平均は29.53日で、この平均朔望月の長さのみを基準にして朔を決めるのを経朔（平朔）というのに対して、太陽や月の運動の不等速度を考慮して、平均運動を補正して暦を組み立てる法を定朔という。初めて公式に定朔法を採用した暦が、王孝通の批判する傅仁均の戊寅暦である。「朔月の行は定分九千」とは、朔のときの月の１日の行分が定朔法で補正して9000という意であるが、行分を定朔法により補正していることから「定」字を付けているのであろう。

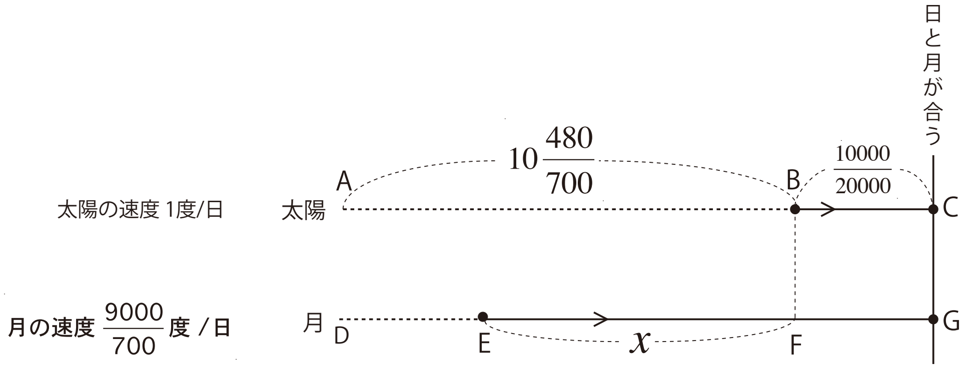
(23)「朔日（の行）は定小余一万、日法は二万」とは、朔が起こるのが、１日を20000として太陽が補正された値で10000進んだとき、すなわち半日後に起こることをいう。

(24)「章歳」は太陽の１日の行分を表す率で、ここで700と定めている。本題では太陽や月の運行は章歳を分母とする分数で表される。自注［3］で説明されるが、太陽の１日の行分は度数で１度であるので、行分を章歳700で割れば度数が得られ、その度数と余りの分数を「度分」と呼んでいる。また、１日の太陽の行分は章歳700であり、月の行分は9000であるが、その逆比はそれぞれの公転周期である１年と１ヶ月の比に近いものになっている。

(25)「加時」とは、ちょうどその時のこと、本題では朔がおこるちょうどその時刻を言う。「加時の日度を取らず」とは、朔の起こる時の太陽の度数を計算で求めないこと。自注で述べる犬追兎術で計算すれば、朔時の太陽の度数を求める必要がないので、このように言ったのである。以下に見える「加時の日度」は全て朔時の太陽（月も同じ）の度数を指す。

(26) 本題は、朔が起きる前の冬至夜半の日の位置を与え、朔が起きるまでの時間を半日とするとき、冬至夜半の月の位置を求める問題である。

(27) 術では、自注［3］で述べる犬追兎術によって求めている。



図は太陽と月の動きを直線的に表したもので、Aが斗宿の距星、BとEがそれぞれ太陽と月の朔夜半の位置を表し、それらがそれぞれCとGで合った（朔となった）ことを表している。EF間が太陽の月に先行している距離で、ここではまず行分で求めてから、章歳700で割って度分に直す。月と太陽の差は、行分で1日あたり9000－700縮まる。朔夜半から朔までは$\frac{10000}{20000}$日で、この時間に差が無くして追いつくのであるから、EF間を行分で求めると

$$\frac{（朔月行定分－章歳）\times 朔日定小余}{日法}=\frac{(9000-700)\times 10000}{20000}=4150$$

となる。

(28)「已」は「以」に通ず。ここでは半法（10000）以上なら切り上げ、半法（10000）以下なら切り捨てるということ。上注の計算では割り切れたが、これが割り切れず、分数が残ったときの処理を説明している。行分700で1度なのであるから、丸め誤差は$\frac{1}{2\times 700}\fallingdotseq 0.0007$度くらいであり、無視して分数を避ける方を選んだのであろう。

(29)「満日の行の分」とは、太陽の丸1日の行分のことで、章歳のことである。注（24）で述べたように、これで注（27）の先行分を割った$\frac{4150}{700}=5\frac{650}{700}$度がEF間、すなわち太陽が月に先行している度分である。

(30) 朔の夜半の時点でBに在る太陽の度分から、EF間の太陽が月に先行している度

分を引けば、その時点でEに在る月の度分が求められる。

$$日度-\frac{先行分}{章歳}=10\frac{480}{700}-5\frac{650}{700}=5\frac{480}{700}-\frac{650}{700}=4\frac{700+480}{700}-\frac{650}{700}=4\frac{530}{700}$$

であるから、朔の夜半の月は斗宿の$4\frac{530}{700}$度に在ることがわかり、これが答である。

(31) 前注では、太陽の度分の方が大きくて引き算ができたが、そうでない場合には手前の箕宿から斗宿に至る度数を太陽の度数に加えてやればよい。「往宿度」とは宿から宿へ移動する度数の意。求められる答は当然箕宿での位置ということになる。

(32) 上注 (30) で計算しているように、度分の分の方が引くのに足りなければ、１度を（章歳700分の）行分700として引き算を行えばよい。

訳：仮に年初11月の朔日の夜半（朔が起こる前）に、太陽が斗宿の$10\frac{480}{700}$度に在るとする。章歳を分母とし、月の運行は定朔で分9000、朔の太陽の行の定朔による小余は10000であり、１日の法は20000、章歳は700、また行分の法と名づける。今、ちょうど朔の時における太陽の度数は用いない。問う天正（年初）の朔日の夜半の時、月は何処に在ったか。

答にいう、斗宿の$4\frac{530}{700}$度に在った。

術にいう、章歳を朔の月行の定朔の分から引き、残りは朔の太陽の行の定朔による小余に掛ける。満一日の法（20000）で割って、先行分（4150）とする。割り尽くせない者は、半法以上であれば１に切り上げ、半法以下のものは切り捨てる。そこで先行分を満１日の行分（700）で割れば、度と分になる。それを朔日夜半に太陽がある所の度と分から引く。もし度と分が引くのに足りなければ、既に通った宿からの度数を足す。その分の部分が引くのに足りなければ、度の１をくずして分に変えてこれを引く。残りは直ちに朔日夜半に月が在る所の度と分となる。

算題［一］と［二］には［1］～［4］の注が加えられているが、これらはみな王孝通の自注である。

［1］推朔夜半月度、舊術要須加時日度。自古先儒雖復修撰改制、意見甚衆、竝未得算妙、有理不盡、考校尤難。臣毎日夜思量、常以此理屈滯、恐後代無人知者。今奉敕造曆、因即改制、爲此新術。舊推日度之術已得朔夜半日度、仍須更求加時日度、然知月處。臣今作新術、但得朔夜半日度、不須加時日度、即知月處。此新術比於舊術、一年之中十二倍省功、使學

者易知。

訓読：朔の夜半の月の度を推すに、旧術は加時の日度を須いるを要す(33)。古より先儒復た撰を修め制を改むと雖も、意見甚だ衆く、並びに未だ算の妙を得ず、理あるも尽きず、考校尤も難し。臣、毎日夜思量し、常に此の理の屈滞するを以て、後代の人知る者無きを恐る。今勅を奉じて暦を造るに、因りて即ち制を改め、此の新術を為る。旧の日度を推すの術は已に朔夜半の日度を得、仍お須らく更に加時の日度を求め、然して月の処を知るべし。臣、今新術を作るに、但だ朔夜半の日度を得るのみにして、加時の日度を須いず、即ち月の処を知る。此の新術は旧術に比べ、一年の中に十二倍功を省き、学ぶ者をして知り易からしむ(34)。

注：(33) かつては、朔が起こる時の太陽の宿での位置を計算で求め、そこから引き算をして夜半の月の位置を求めたことを言う。それが「犬追兎術」を用いることで、直接夜半の月の位置を求める方法を、王孝通は考えたというのである。

(34) 定朔法を用いて朔の起こる日の夜半の月の位置を計算する場合、楕円軌道を描く月の地球に対する位置は、毎朔ごとに月の定分が変わるので、そのたびに計算しなければならなくなる。この計算を犬追兎術を用いることで、暦の初心者にも簡単にしたことをいう。

訳：朔の起こる前の夜半の月の度数を推算するには、旧術では朔の時の太陽の位置の計算を必要とした。古くより先達は繰り返し修訂・改制したといえども、意見甚だ多く、まだその算は精妙とは言えず、理には尽きないものが有って、考覈するのは大変難しい。臣は毎日毎夜思量し、常にこの理が滞って理解が届かないがために、後代に理解する人がいなくなることを恐れた。今勅を奉じて暦を造り、それによって制を改め、これを新術とする。旧来の日度を計算する術では朔の夜半の日度を得て、更になお朔の時の太陽の度数を求める必要があり、しかる後に月の夜半の位置を知ることができた。臣、今新術を作り、ただ朔の夜半の日度を得るだけで、朔の時の太陽の度数の計算を必要としないで、月の所在がわかるようにした。この新術は旧術と比べて、一年の中では12倍手間が省かれ、学ぶ者にたやすく知らしめることができる。

［2］推朔夜半月度、新術不復加時日度、（月蝕）〈有定小餘〉[一]乃可用之。

校訂：［一］李潢に従い、「月蝕」を「有定小餘」に改める。

訓読：朔の夜半の月度を推すに、新術は加時の日度を復さず、定の小余有りて乃ち之を用う可し。

訳：朔の夜半の月度を推算するには、新術では復た朔時の太陽の度数を復すことはなく、

定朔の小余があるので、そこでそれを用いればよい。

[3] 凡入暦當月行定分即是月一日之行分。但此定分滿章歳而一爲度。凡日一日行一度。然則章歳者即是日之一日行分也。

今按『九章』均輸篇有犬追兔術、與此術相似。彼問、「犬走一百步、兔走七十步。令兔先走七十五步、犬始追之。問幾何步追及。荅曰、二百五十步追及。彼術曰、以兔走減犬走、餘者爲法。又以犬走乘兔先走爲實。實如法而一、即得追及步數」。

此術亦然。何者、假令月行定分九千、章歳七百、即是日行七百分、月行九千分。令日・月行數相減、餘八千三百分者、是日先行之數。然月始追之、必用一日而相及也。令定小餘者、亦是日月相及之日分。假令定小餘一萬、即相及定分、此乃無對爲數。其日法者、亦是相及之分、此又同數、爲有八千三百、是先行分也。斯則異矣。但用日法除之、(即)〈得〉[一] 四千一百五十、即先行分。故以夜半之時日在月前、月在日後、以日月相去之數四千一百五十減日行所在度分即月夜半所在度分也。

校訂：[一] 李潢に従い、「即」を「得」に改める。

訓読：凡そ暦に入るに、当に月行の定分は即ち是れ月の一日の行分たるべし。但だ此の定分は満章歳にして一を度と為す。凡そ日の一日の行は一度。然らば則ち章歳なる者は即ち是れ日の一日の行分也(35)。

今『九章』均輸篇を按ずるに、「犬、兔を追うの術」有り、此の術と相似たり(36)。彼問うに、「犬走ること一百歩、兔走ること七十歩。兔をして先に走ること七十五歩にして、犬をして始めて之を追わしむ。問う、幾何歩にして追い及ぶや。答に曰う、二百五十歩にして追い及ぶ」。彼の術に曰く、「兔の走るを以て犬の走るより減じ、余は法と為す。又た犬の走るを以て兔の先に走るに乗じて実と為す。実、法の如くして一とすれば、即ち追い及ぶの歩数を得(37)」。

此の術も亦た然り(38)。何となれば、仮令に月行の定分九千、章歳七百なれば、即ち是れ日行は七百分、月行は九千分なり。日・月の行数をして相減ぜしむれば、余の八千三百分なるものは、是れ日の先行の数なり。然して月始めて之を追うに、必ず一日を用いて相及ぶ也。定小余をして、亦た是れ日・月の相及ぶの日分たらしむ。仮令に定小余一万、即ち相及ぶの定分たれば、此れ乃ち対して数と為す無し。其の日法は、亦た是れ相及ぶの分にして、此れも又た同数にして、八千三百有りて、是れ先行の分と為す也。斯れ則ち異なれり(39)。但だ日法を用いて之を除せば、四千一百五十を得、即ち先行するの分なり(40)。故に夜半の時、日は月の前に在るを以て、月は日の後ろに在り、日・月相去るの数四千一百五十を以て日行の在る所の度分より減ずれば、即

ち月の夜半に在る所の度分也[41]。

注：(35)「入暦」は、「入暦日」の略であろう。月行の定分9000は１日の月の行分であり、章歳700で割ることにより、度数にすることができる。太陽は、１日の行が１度であり、それを分に直せば章歳700なのであるから、章歳は太陽の１日の行分である。注 (24) 参照。

(36)『九章算術』均輸章［一四］題を指すようであるが、数値や設定は異なっている。

(37) 犬が100歩走る間に差は$100-70=30$ 歩縮むのであるから、x歩走ると75歩の差が縮まるとすれば$\frac{100}{100-70}=\frac{x}{75}$が成り立つ。したがって、犬は$x=\frac{100\times 75}{100-70}=\frac{7500}{30}=250$歩走る。

(38) 状況は同じであるが、厳密には逆問題である。「犬追兔」題では、先行分と両者の速さから犬が走った距離を求めている。ここで上注の式で$\frac{75}{100-70}$の部分は、追いつく時間に相当する量を表している。すなわち（先行分）÷（差の縮む率）＝（追いつく時間）である。ここで（追いつく時間）は犬が100歩走る時間が何回分かで表される。したがって犬が走る距離１回分の100歩を掛ければ答が求まった。本題では両者の速さと追いつくまでの時間から先行分を求めている。すなわち（差の縮む率）×（追いつく時間）＝（先行分の率）である。ここで（先行分の率）は太陽と月の間の距離を行分で表したものである。これを「章歳 (１度の率)」で割ることで先行分の度数が求められる。

(39) 月の１日の行分から太陽の１日の行分を引いただけでは、１日あたりの差が縮む分を求めているだけで、追いつくまでに縮んだ差ではないと述べている。

(40) 前注に引き続き、先行する分は追いつくまでの日数$\frac{10000}{20000}$を掛けたものが正しいと述べている。注 (27) 参照。

(41) 太陽に遅れる度分を引いて、月の在る度分を求める計算である。注 (30) 参照。

訳：およそ入暦するときは、月行の定分が即ち月の１日の行分となすべきである。ただこの月の定分は満章歳で割って度分に変えなければいけない。およそ太陽の１日の行は１度。そうであれば章歳とは太陽の１日の行分のことである。

今『九章』均輸章を考えると犬が兔を追う術が有って、この術と互いによく似ている。その問は、「犬は100歩を走り、兔は70歩を走る。兔を先に75歩を走らせてから、犬がこれを追う。問う、何歩で追いつくか。答にいう、250歩で追いつく」というものである。その術に「兔の走る70歩を犬の走る100歩から引いて、残りは法とする。また犬の走る100歩を兔の先に走った75歩に掛けて実とする。実を法で割れば、追いつくまでの歩数が得られる」という。

この術もまた同様である。何となれば、仮に月の行定分9000、章歳700であれば、すなわちこれは太陽の行分700とすると、月の行分は9000となるということである。太陽と月の行数を差し引いて、残りの8300を分子とするのは、これは太陽が先行する数である。そうであれば月が初めに太陽を追うのには、必ず１日を用いて追いつくことになる。定小余というものも、またこの太陽に月が追い付く１日の行分にさせるのである。仮に定小余が10000であれば、すなわち追いつく定分は、これには対応する数がない。その日法もまた月が太陽に追いつく数に用いた分母、これはまた同数(700)であるから、8300であるとして、これが先行分である。これは異なっている。ただ日法を用いてこれを割れば、4150を得て、すなわち先行分である。故に夜半の時に太陽は月の前にあり、月は太陽の後にあり、太陽と月の差をとった数4150を太陽がある所の度分から引けば、月が夜半にある所の度分になる。

次の算題［二］は、４つの問題からなっている。そこで、問題および答、４つの問題のそれぞれの術文に分けて、５つの部分として扱うことにする。また、２つ目の術文に付けられた注もその術文の後に扱う。

[二]假令太史造仰觀臺、上廣･袤少、下廣･袤多。上下廣差二丈、上下袤差四丈、上廣･袤差三丈、高多上廣一十一丈。甲縣差一千四百一十八人、乙縣差三千二百二十二人。夏程人功常積七十五尺。限五日役臺畢。羨道從臺南面起、上廣多下廣一丈二尺、少袤一百四尺、高多袤四丈。甲縣一十三鄉、乙縣四十三鄉、每鄉別均賦常積六千三百尺。限一日役羨道畢。二縣差到人共造仰觀臺、二縣鄉人共造羨道。皆從先給甲縣、以次與乙縣。臺自下基給高、道自初登給袤。問臺･道廣･高･袤及縣別給高･廣･袤各幾何。
荅曰、臺高一十八丈、上廣七丈、下廣九丈、上袤一十丈、下袤一十四丈。
甲縣給高四丈五尺、上廣八丈五尺、下廣九丈、上袤一十三丈、下袤一十四丈。
乙縣給高一十三丈五尺、上廣七丈、下廣八丈五尺、上袤一十丈、下袤一十三丈。
羨道高一十八丈、上廣三丈六尺、下廣二丈四尺、袤一十四丈。
甲縣鄉人給高九丈、上廣三丈、下廣二丈四尺、(上)[一]袤七丈。(下袤一十四丈)[一]
乙縣鄉人給高九丈、上廣三丈六尺、下廣三丈、(下)[二]袤七丈。

校訂：［一］「上」および「下袤一十四丈」は衍字。李潢に従い削る。
［二］「下」は衍字。李潢に従い削る。

訓読： 仮令に太史、仰観台を造るに、上広・袤少なく、下広・袤多し。上下の広の差は二丈、上下の袤の差は四丈、上の広袤の差は三丈、高は上広より一十一丈多し(42)。甲県は一千四百一十八人を差わし、乙県は三千二百二十二人を差わす。夏程の人功(43)の常積七十五尺。五日に限り台を役し畢わる。羨道は台の南面従り起こり、上広は下広より一丈二尺多く、袤より一百四尺少なく、高は袤より四丈多し(44)。甲県一十三郷、乙県四十三郷、郷毎に別に均しく常積六千三百尺を賦す。一日に限り羨道を役し畢わる。二県の差わし到る人は共に仰観台を造り、二県の郷の人は共に羨道を造る。皆な従って先に甲県に給し、次を以て乙県に与う。台は下基より高に給し、道は初登自り袤に給す(45)。問う、台・道の広・高・袤及び県別に給する高・広・袤は各おの幾何ぞ(46)。

答に曰う、台の高一十八丈、上広七丈、下広九丈、上袤一十丈、下袤一十四丈。

甲県の給は高四丈五尺、上広八丈五尺、下広九丈、上袤一十三丈、下袤一十四丈。

乙県の給は高一十三丈五尺、上広七丈、下広八丈五尺、上袤一十丈、下袤一十三丈。

羨道の高一十八丈、上広三丈六尺、下広二丈四尺、袤一十四丈。

甲県の郷人の給は高九丈、上広三丈、下広二丈四尺、袤七丈。

乙県の郷人の給は高九丈、上広三丈六尺、下広三丈、袤七丈。

注： (42)「仰観台」は天文観測台のこと。その形状は四角錐台で、最短辺の上広（上面の幅）を基準に辺長が与えられている。上広をa_1尺とすると、下広（下面の幅）a_2尺を$a_2=a_1+20$、上袤（上面の奥行）b_1尺を$b_1=a_1+30$、下袤（下面の奥行）b_2尺を$b_2=b_1+40=a_1+70$、高さh尺を$h=a_1+110$のように与えている。図2－1参照。

(43)「人功」は労働規程に定められた1日1人あたりの仕事量。文献10）注（14）参照。

(44)「羨道」はスロープ。仰観台の南面、すなわち台の広側の面に付き、形状は三角柱の三角形の面に三角錐を張り合わせたものになっている。最短辺の下広をc_2尺とすると、上広c_1尺を$c_1=c_2+12$、袤d尺を$d=c_1+104=c_2+116$、高さk尺を$k=d+40=c_2+156$のように与えている。図2－2参照。

(45) 羨道を作るにあたっては、台の下広に近いところから、道の高さを増すにつれて、奥行も増すということで、この割合を一定にして造っている。スロープの傾きが一定と言うこともできる。

(46) 本題は、図のような仰観台と羨道を建造するとき、それぞれの体積を求め、さらにそれを甲乙両県に賦役するのに、それぞれがどれだけを分担するか求める問題である。

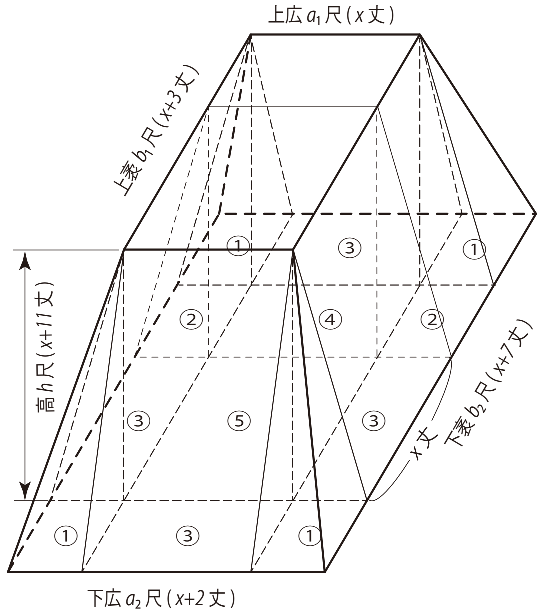


図２－１

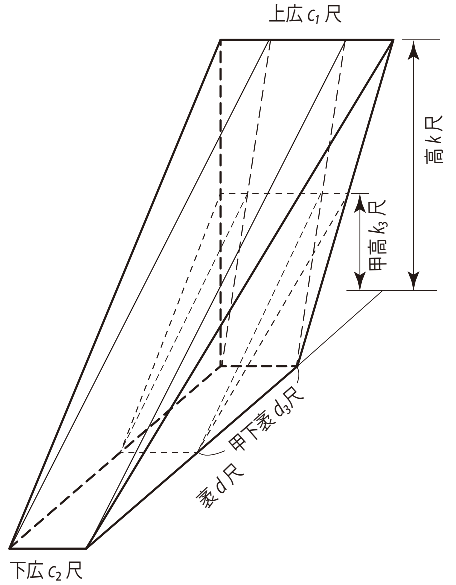


図２－２

訳：仮に太史が仰観台を造るのに、上の広・袤は小さく、下の広・袤は大きくする。上下の広の差は２丈､上下の袤の差は４丈､上の広袤の差は３丈､高は上広より11丈大きい。甲県は1418人を差し向け、乙県は3222人を差し向ける。夏程に定める人の作業量は常積75尺。５日を期限とする労役で台を造り終える。羨道は台の南面から起こり、上広は下広より１丈２尺大きく､袤より104尺小さく､高は袤より４丈大きい。甲県は13郷、乙県は43郷、郷毎に台とは別に均しく常積6300立方尺を課す。１日に限った労役で羨道を造り終える。２県の差し向けた人は共に仰観台を造り、２県の郷の人は共に羨道を造る。どちらも先に甲県に割り当て、次に乙県に与える。台は下の基から高さを積み上げ、道は登り口から奥行を伸ばしていく。問う、台と道の広・高・袤および県ごとに積み上げる高・広・袤はそれぞれどれほどか。

答にいう、台の高18丈、上広７丈、下広９丈、上袤10丈、下袤14丈。

甲県の寄与は高４丈５尺、上広８丈５尺、下広９丈、上袤13丈、下袤14丈。

乙県の寄与は高13丈５尺、上広７丈、下広８丈５尺、上袤10丈、下袤13丈。

羨道の高18丈、上広３丈６尺、下広２丈４尺、袤14丈。

甲県の郷人の寄与は高９丈、上広３丈、下広２丈４尺、袤７丈。

乙県の郷人の寄与は高９丈、上広３丈６尺、下広３丈、袤７丈。

（［二］術文①）

術曰、以程功尺數乘二縣人、又以限日乘之、爲臺積。又以上下袤差乘上下廣差、三而一、爲隅陽冪、以乘截高爲隅陽截積(冪)[三]。又半上下廣差、乘斬上袤、爲隅頭冪、以乘截高爲隅頭截積。(所得)[四]幷二積、以減臺積、餘爲實。以上下廣差幷上下袤差、半之、爲正數、加截上袤、以乘截高、所得增隅陽冪、加隅頭冪、爲方法。又幷截高及截上袤與正數、爲廉法、從。開立方除之、即得上廣。各加差、得臺下廣及上下袤·高。

校訂：［三］「冪」は衍字。王孝通は定数を「積」、１次の係数を「冪」と使い分けている。
［四］「所得」は衍字。李潢に従い削る。

訓読：術に曰う、程功の尺数を以て二県の人に乗じ、又た限日を以て之に乗じ、台積と為す(47)。又た上下の袤の差を以て上下の広の差に乗じ、三にして一とし、隅陽冪と為し、以て截高に乗じて隅陽截積と為す(48)。又た上下の広の差を半にし、斬上袤に乗じて、隅頭冪と為し、以て截高に乗じて隅頭截積と為す(49)。二積を併せ、以て台積より減じ、余を実と為す(50)。上下の広の差を以て上下の袤の差に併せ、之を半にし、正数と為し(51)、截上袤を加え、以て截高に乗じ、得る所は隅陽冪に増し、隅頭冪を加え、方法と為す(52)。又た截高及び截上袤と正数を併せ、廉法と為し、従う(53)。開立方して之を除けば、即ち上広を得(54)。各おの差を加え、台の下広及び上下の袤・高を得(55)。

注：(47) 台の体積は労働量の合計に等しいから、(人数の和×常積×日数) で計算して、(1418＋3222) ×75×5＝4640×75×5＝1740000立方尺である。第１の術では、この体積を与えるような台の上広を求める。計算は丈の単位で行っていたと思われ、実際その方が計算も簡単である。1000立方尺で１立方丈であるから、台の体積は1740立方丈である。以下注 (54) までは、上広をx丈、すなわち$x=\frac{a_1}{10}$とし、xについての方程式を立てていく。

(48) ここではまず、図２－１の底面で①の部分の上にある、台の角(かど)の部分にあたる、４つの四角錐の体積について考えている。４つの四角錐を集めてできる四角錐は、底面が２丈×４丈で高さが$x+11$丈である。図２－３参照。その体積は

$$\frac{1}{3}\times 2\times 4\times(x+11)=\frac{8}{3}x+\frac{88}{3}$$

であるが、右辺の１次の係数$\frac{8}{3}$を「隅陽冪」、定数項$\frac{88}{3}$を「隅陽截積」と呼んでいる。ここで「截高」は台高を上広で截った残りの11丈（$h-a_1-110$尺）を指している。

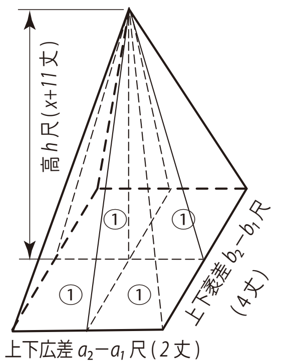


図２－３

(49) 図２－１の底面で②の部分の上にある２つの三角柱について考えている。「斬上袤」とは上袤を上広で斬った残りの３丈（$b_1-a_1=30$尺）のこと。２つの三角柱を組合わせると図２－４に示すような直方体になるので、その体積は、$2\times\frac{1}{2}\times3\times(x+11)=3x+33$となる。ここで１次の係数３は②の部分の面積で、これを「隅頭冪」と呼んでいる。また定数項33は「隅頭截積」と呼んでいる。

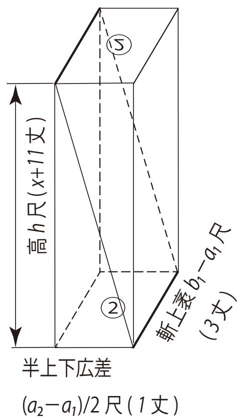


図２－４

(50)「隅陽截積」$\frac{88}{3}$立方丈と「隅頭截積」33立方丈を併せて台積1740立方丈から引くと$1677\frac{2}{3}$立方丈となるが、これが「実」である。

(51) ここでは図２－１の底面で③の部分の上にある４つの三角柱について考えている。②のときと同様に、対向する２つの三角柱をそれぞれ組合わせて直方体にし、２組を合わせると、図２－５に示すように、その１辺の長さは上下の広差と袤差の和の半分で３丈$\left(\frac{(a_2-a_1)+(b_2-b_1)}{2}=30\text{尺}\right)$となるが、これを「正数」とする。構成された直方体の体積は、（正数×上広×高）の$3\times x\times(x+11)=3x^2+33x$である。

(52) 上注の立体の体積で、１次の係数33は（正数×截高）であった。一方、図２－１の底面で④の上の部分は図２－６の奥側の直方体で、その体積は（上広×斬上袤×高）の$x\times3\times(x+11)=3x^2+33x$である。その１次の係数33は（斬上袤×截高）である。上広xの１次の係数となるのは、この他には①の上で隅陽冪$\frac{8}{3}$と②の上で隅頭冪３があり、これで全てである。これらの合計を「方法」とし、３次方程式の１次の係数とする。「方法」は$(3+3)\times11+\frac{8}{3}+3=\frac{215}{3}$となる。

(53) 図２－１の底面で⑤の部分の上にある直方体の体積は（上広^2×高）で$x^2(x+11)=x^3+11x^2$である。この２次の係数11は「截高」である。３次方程式の２次の係数を「廉法」とするが、廉法は③の上の「正数」３と④の上の「截上袤」３、

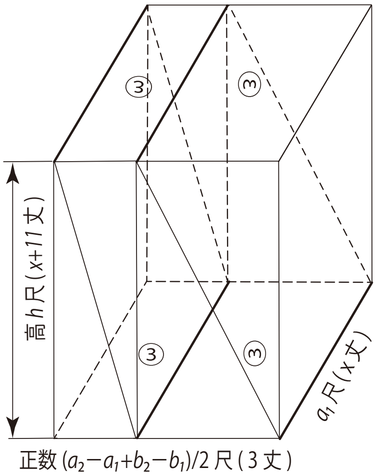


図２－５

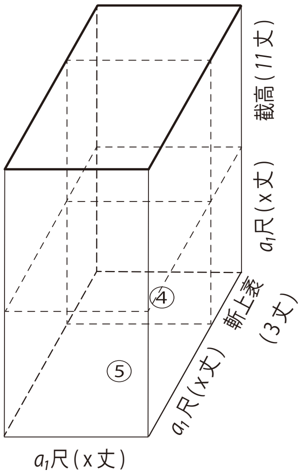


図２－６

⑤の上の「截高」11とを加えた17丈となる。

(54) 以上の注より、上広をx丈とすると$x^3+17x^2+\frac{215}{3}x=1677\frac{2}{3}$を解けばよい。これは２次以下の係数が０ではない３次方程式なので帯従立方式である。このままでは係数に分数が入っていて解きにくいので、３次の係数である「隅法」、および「廉法」、「方法」、「実」をすべて３倍して$3x^3+51x^2+215x=5033$を解いたと思われる。ここで「隅法」は李廣の用いた語である。

３次方程式の具体的な解法について、王孝通は「開立方除之」と述べるだけであるが、『緝古算経』で25もの３次方程式を扱っていることを見ると、帯従立方式の解法は一般化していたと考えられる。実際、開立方は『九章算術』少広章で解法が述べられているが、初商を求めた後の操作は開帯従立方そのものである。文献11）参照。すなわち$x^3=R$の初商Aを求めた後の「実」は$x^3-A^3=R-A^3$となるが、$x^3-A^3=(x-A)^3+3xA(x-A)=(x-A)^3+3A(x-A)^2+3A^2(x-A)$であるので、これは次商$y=x-A$についての帯従立方式$y^3+3Ay^2+3A^2y=R-A^2$に他ならない。

銭宝琮は『九章算術』の開立方の術文に倣って、文献12）で王孝通の開帯従立方術の要旨を説明しているが、ここではその方法に従って$3x^3+51x^2+215x=5033$を解いてみる。

①　初期配置

商							
実	５	０	３	３			
方法		２	１	５			
廉法			５	１			
隅法				３			

②　初商７を立てる
初商×廉法、初商^2×隅法を右に置く。

商				７			
実	５	０	３	３			
方法		２	１	５			
廉法			５	１	３	５	７
隅法				３	１	４	７

③　右に置いた両者を方法に加える。

商				７			
実	５	０	３	３			
方法		７	１	９			
廉法			５	１	３	５	７
隅法				３	１	４	７

④　方法×初商を実から引く。
実が０になるので解は７である。

商				７			
実				０			
方法		７	１	９			
廉法			５	１	３	５	７
隅法				３	１	４	７

(55) 上注の計算より上広$x=7$丈であるから、下広は$x+2=9$丈、上袤は$x+3=10$丈、下袤は$x+7=14$丈、高さは$x+11=18$丈である。

訳：術にいう、程功の尺数を２県の人数に掛け、さらに期限をこれに掛けて、台の体積とする。また上下の袤の差を上下の広の差に掛けて、３で割って、「隅陽冪」とし、「截高」に掛けて「隅陽截積」とする。また上下の広の差を半分にし、「斬上袤」に掛けて、「隅頭冪」とする。これを「截高」に掛けて「隅頭截積」とする。２つの積を併せ、台の体積から引いて、残りは実とする。上下の広の差を上下の袤の差に併せて、これらを半分にし、「正数」とし、「截上袤」を加え、「截高」に掛け、得られたものは「隅陽冪」に足し、「隅頭冪」を加え、方法とする。さらに「截高」および「截上袤」と「正数」を併せ、廉法とし、従わせる。開立方してこれを除けば、上広が得られる。各々の差を加えると、台の下広および上下の袤・高が得られる。

（［二］術文②）

求均給積尺受廣袤術曰、以程功尺數乘乙縣人、又以限日乘之、爲乙積。三因之、

又以高冪乘之、以上下廣差乘袤差而一、爲實。又以臺高乘上廣、廣差而一、爲上廣之高。又以臺高乘上袤、袤差而一、爲上袤之高。又以上廣之高乘上袤之高、三之、爲方法。又幷兩高、三之、二而一、爲廉法、從。開立方除之、即乙高。以減本高、餘即甲高。此是從下給臺甲高。又以廣差乘(之)〈乙〉[五]高、以本高而一。所得加上廣、即甲上廣。又以袤差乘乙高、如本高而一。所得加上袤、即甲上袤。其甲上廣･袤即乙下廣･袤。臺上廣･袤即乙上廣･袤。其後求廣･袤有增損者、皆放此[4]。

校訂：［五］「之」は「乙」字の誤り。文意から改める。

訓読：均しく積尺を給し受くる広・袤を求むるの術に曰う、程功の尺数を以て乙県の人に乗じ、又た限日を以て之に乗じ、乙の積と為す(56)。三もて之に因し、又た高冪を以て之に乗じ、上下の広の差を袤の差に乗ずるを以てして一とし、実と為す(57)。又た台高を以て上広に乗じ、広の差にして一とし、上広の高と為す(58)。又た台高を以て上袤に乗じ、袤の差にして一とし、上袤の高と為す(59)。又た上広の高を以て上袤の高に乗じ、之を三し、方法と為す(60)。又た両高を併せ、之を三し、二にして一とし、廉法と為し、従う(61)。開立方して之を除けば、即ち乙の高(62)。以て本の高より減ずれば、余は即ち甲の高たり。此れは是れ下従り台に給する甲の高なり(63)。又た広の差を以て乙の高に乗じ、本の高を以てして一とす。得る所は上広に加うれば、即ち甲の上広なり(64)。又た袤の差を以て乙の高に乗じ、本の高の如くして一とす。得る所は上袤に加うれば、即ち甲の上袤(65)。其の甲の上広・袤は即ち乙の下広・袤なり。台の上広・袤は即ち乙の上広・袤なり。其れ後の広・袤の増損有る者を求むるは、皆な此に倣う。

注：(56) 乙の台の積をV_Bとすると、$V_B=75\times3222\times5=1208250$である。第2の術では、この体積$V_B$を与えるような、乙の台高$h_B$尺を求める。

(57) 注 (42) で台の上広a_1尺、下広a_2尺、上袤b_1尺、下袤b_2尺、高h尺としたことに加え、乙の作る台の下広a_3尺、下袤b_3尺、高h_B尺とする。四角錐台の体積Vは、第1の術で求めたように四角錐・三角柱・直方体に分けて考えると

$$V=\frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)h}{3}+\frac{a_1(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1)h}{2}+a_1b_1h$$

のように書ける。実際、『九章算術』商功章では、多少構成は異なるが「芻童」の体積を同等の術で計算している。文献13)の「芻童」の術文および劉徽注［34］参照。したがって、乙の作る台については

$$V_B=\frac{(a_3-a_1)(b_3-b_1)\ h_B}{3}+\frac{a_1(b_3-b_1)+b_1(a_3-a_1)h_B}{2}+a_1b_1h_B$$

が成り立つ。ここで台を上広の辺を含む鉛直面で切ると、図２－７に示すように、断面上の三角形の相似より$\frac{h_B}{h}=\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}$が成り立つ。また、同様に$\frac{h_B}{h}=\frac{b_3-b_1}{b_2-b_1}$も成り立つ。したがって

$$V_B=\frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)\ h_B^3}{3h^2}+\frac{a_1(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1)h_B^2}{2h}+a_1b_1h_B$$

となる。これが乙の高h_Bを求めるために解くべき３次方程式である。実際には、h_B^3の係数を１にした

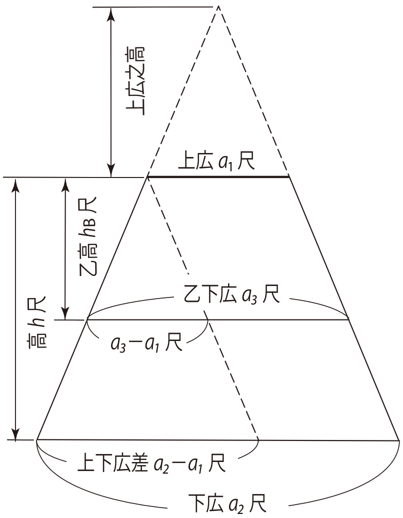


図２－７

$$\frac{3h^2V_B}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}=h_B^3+\frac{3}{2}\left(\frac{a_1h}{a_2-a_1}+\frac{b_1h}{b_2-b_1}\right)h_B^2+\frac{3a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}h_B$$

を解いている。ここではまず、定数項である$\frac{3h^2V_B}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}=\frac{3\times180^2\times1208250}{20\times40}$ $=146802375$を「実」としている。

(58)「上廣之高」は$\frac{a_1h}{a_2-a_1}=\frac{70\times180}{20}=630$である。これは台を上広の辺を含む鉛直面で切った断面において、等脚台形の脚にあたる辺を延ばして上辺の上に三角形をつくるとき、その三角形の高さである。図２－７参照。

(59)「上袤之高」は$\frac{b_1h}{b_2-b_1}=\frac{100\times180}{40}=450$である。前注と同様に、上袤の上に立つ三角形の高さである。

(60)「方法」は２つの「高」の積の３倍で、$\frac{3a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}=3\times630\times450=850500$である。

(61)「廉法」は２つの「高」の和の$\frac{3}{2}$倍で、$\frac{3}{2}\left(\frac{a_1h}{a_2-a_1}+\frac{b_1h}{b_2-b_1}\right)=\frac{3}{2}\times(630+450)$ $=1620$である。

(62) 以上より、乙の分の台の高さh_Bを求めるには、３次方程式

$$y^3+1620y^2+850500y=146802375$$

を解けばよい。注(54)と同様に、銭宝琮の提示する方法に従ってこれを解いてみる。今回は次商・三商が現れる点が異なっている。加法・減法の計算では、算木を表す数字が置かれた位を合わせて行う。

① 初期配置。方法は１つずつ、廉法は１つ飛ばし、隅法は２つ飛ばしで位を進める。

商									
実	1	4	6	8	0	2	3	7	5
方法		・	←	8	5	0	5	0	0
廉法		・	←	←	←	1	6	2	0
隅法			・	←	←	←	←	←	1

② 初商１を見積る。初商を廉法に掛けたもの、初商の自乗を隅法に掛けたものを右に置く。

商							1							
実	1	4	6	8	0	2	3	7	5					
方法		8	5	0	5	0	0							
廉法		1	6	2	0					1	6	2	0	初商×廉
隅法			1								1			初商×初商×隅

③ 方法に右に置いた２つを加える。

商							1							
実	1	4	6	8	0	2	3	7	5					
方法	1	0	2	2	5	0	0							方＋右二位
廉法		1	6	2	0					1	6	2	0	
隅法			1								1			

④ 方法に初商を掛けて、実より除く。初商１は100を表し、元の３次方程式の近似解である。$y=100$のとき、元の３次方程式における（右辺）－（左辺）の値がここで求める実である。

商							1							
実		4	4	5	5	2	3	7	5					実－方×初商
方法	1	0	2	2	5	0	0							
廉法		1	6	2	0					1	6	2	0	
隅法			1								1			

⑤　方法に右隅の２倍と右廉を加え、廉法には初商の３倍を加え、右廉・右隅は取り去る。方法は１つ、廉法は２つ、隅法は３つ、位を下げる。

商	1		
実	4 4 5 5 2 3 7 5		
方法	1 2 0 4 5 0 0 ・		方＋右廉＋2右隅
廉法	1 9 2 0 → ・	1 6 2 0	廉＋3初商
隅法	1 → → ・	1	

⑥　次に次商y_2の３次方程式$y_2^3+1920y_2^2+1204500y_2=44552375$を解く。次商３を見積る。次商を廉法に掛けたもの、次商の自乗を隅法に掛けたものを右に置く。

商	1 3		
実	4 4 5 5 2 3 7 5		
方法	1 2 0 4 5 0 0		
廉法	1 9 2 0	5 7 6 0	次商×廉
隅法	1	9	次商×次商×隅

⑦　方法に右に置いた２つを加える。

商	1 3		
実	4 4 5 5 2 3 7 5		
方法	1 2 6 3 0 0 0		方＋右二位
廉法	1 9 2 0	5 7 6 0	
隅法	1	9	

⑧　方法に次商を掛けて、実より除く。次商３は30を表し、⑥の３次方程式の近似解である。$y_2=30$のとき、⑥の３次方程式における（右辺）－（左辺）の値が、ここで求める実である。

商	1 3		
実	6 6 6 2 3 7 5		実－方×次商
方法	1 2 6 3 0 0 0		
廉法	1 9 2 0	5 7 6 0	
隅法	1	9	

⑨　方法に右隅の２倍と右廉を加え、廉法には次商の３倍を加え、右廉・右隅は取り去る。方法は１つ、廉法は２つ、隅法は３つ、位を下げる。

商	1 3		
実	6 6 6 2 3 7 5		
方法	1 3 2 2 4 0 0 ・		方＋右廉＋2右隅
廉法	2 0 1 0 → ・	5 7 6 0	廉＋3次商
隅法	1 → → ・	9	

⑩　次に三商y_3の３次方程式$y_3^3+2010y_3^2+1322400y_3=6662375$を解く。三商５を見積る。三商を廉法に掛けたもの、三商の自乗を隅法に掛けたものを右に置く。

商	1 3 5		
実	6 6 6 2 3 7 5		
方法	1 3 2 2 4 0 0		
廉法	2 0 1 0	1 0 0 5 0	三商×廉
隅法	1	2 5	三商×三商×隅

⑪　方法に右に置いた２つを加える。

商	1 3 5		
実	6 6 6 2 3 7 5		
方法	1 3 3 2 4 7 5		方＋右二位
廉法	2 0 1 0	1 0 0 5 0	
隅法	1	2 5	

⑫　方法に三商を掛けて、実より除く。実が０になるので、三商5は⑩の３次方程式の解である。よって元の３次方程式の解として135が求まった。

商	1 3 5		
実			実－方×三商
方法	1 3 3 2 4 7 5		
廉法	2 0 1 0	1 0 0 5 0	
隅法	1	2 5	

(63) 台の高が18丈で、乙の高が13丈５尺であるから、甲の高は４丈５尺である。

(64) 注 (57) で述べたように$\frac{h_B}{h}=\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}$であるので、$a_3=\frac{h_B}{h}(a_2-a_1)+a_1$である。

(65) 前注同様に、$\frac{h_B}{h}=\frac{b_3-b_1}{b_2-b_1}$であるので、$b_3=\frac{h_B}{h}(b_2-b_1)+b_1$である。

訳：均しく積尺を与えてそれに応ずる広・袤を求める術にいう、程功の尺数を乙県の人数に掛け、さらに期限の日数をこれに掛けて、乙の体積とする。これを3倍し、さらに高の自乗をこれに掛けて、上下の広の差を袤の差に掛けたもので割って、実とする。さらに台の高を上広に掛け、広の差で割って、上広の高とする。さらに台の高を上袤に掛けたものを、袤の差で割って、上袤の高とする。さらに上広の高を上袤の高に掛け、これを3倍し、方法とする。さらに両方の高を併せ、3倍し、2で割って、廉法とし、従える。開立方してこれを除けば、それが乙の高である。それを本の高から引けば、残りは甲の高である。これは下から台に与える甲の高である。また広の差を乙の高に掛け、本の高で割る。得られたものを上広に加えれば、それが甲の上広である。また袤の差を乙の高に掛け、本の高で割る。得られたものを上袤に加えれば、それが甲の上袤である。その甲の上広・袤はすなわち乙の下広・袤である。台の上広・袤はすなわち乙の上広・袤である。これより後、広・袤の増減が有るものを求めるときは、みなこのようにするのである。

[4] 此應（三）〈六〉[一]因乙積、臺高再乘、上下廣差乘袤差而一。又以臺高乘上廣、〈廣差而一〉[二]、爲上廣之高。又以臺高乘上袤、〈袤差而一〉[三]、爲上袤之高。〈以上廣之高乘上袤之高〉[四]爲小冪二、因下袤之高爲中冪一。凡下袤・下廣之高、即是截高與上袤與上廣之高相連并數。然此有中冪定有小冪一、又有上廣之高乘截高爲冪（各）[五]一。又下廣之高乘下袤之高爲大冪二、乘上袤之高爲中冪一。其大冪之中又〈有〉[六]小冪一。復有上廣・上袤之高（爲中冪）[七]各乘截高、爲中冪各一。又截高自乘爲冪一。其中冪之内有小冪一、又上袤之高乘截高爲冪一。然則截高自相乘爲冪二、小冪六、又上廣・上袤之高各三、以乘截高爲冪六。令皆半之。故以三乘小冪。又上廣・上袤之高各三、今但半之、各得一又二分之一。故三之二而一。諸冪〈乘〉截〈高〉[八]爲積尺。

校訂：[一]「三」は「六」の誤り。計算により改める。

[二]「廣差而一」を脱す。文脈より補う。

[三]「袤差而一」を脱す。文脈より補う。

[四]「以上廣之高乘上袤之高」を脱す。銭宝琮に従い補う。

[五]「各」字は衍字。文脈より削る。

[六]「有」字を脱す。「又」は「有」に通ずるためか。文脈により補う。

［七］「爲中冪」は衍文。文脈により削る。

［八］「乘」と「高」の二字を脱す。文脈により補う。

訓読： 此れ応に六もて乙の積に因し、台高は再乗し、上下の広の差は袤の差に乗じて一とすべし(66)。又た台高を以て上広に乗じ、広の差にして一とし、上広の高と為す。又た台高を以て上袤に乗じ、袤の差にして一とし、上袤の高と為す。上広の高を以て上袤の高に乗じ小冪の二と為し、下袤の高に因し中冪の一と為す(67)。凡そ下袤・下広の高は、即ち是れ截高と上袤と上広の高と相い連併するの数なり(68)。然れども此こに中冪有るは定めて小冪の一有りて、又た上広の高の截高に乗ずるを冪一と為す有り(69)。又た下広の高は下袤の高に乗じて大冪の二と為し、上袤の高に乗じて中冪の一と為す(70)。其の大冪の中に又た小冪の一有り。復た上広・上袤の高有るは各おの截高に乗じて中冪各おの一と為す。又た截高は自ら乗じて冪一と為す(71)。其の中冪の内に小冪の一有り、又た上袤の高は截高に乗じて冪一と為す(72)。然らば則ち截高は自ら相乗じて冪二と為し、小冪は六し、又た上広・上袤の高は各おの三し、以て截高に乗じて冪六と為す。皆之を半にせしむ。故に三を以て小冪に乗ず。又た上広・上袤の高は各おの三し、今但だ之を半にするのみなれば、各おの一又二分の一を得。故に之を三し、二にして一とす(73)。諸々の冪は截高に乗じ積尺と為す(74)。

注： (66) $\dfrac{6h^2V_B}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ を計算せよということで、これは「実」の 2 倍である。

(67)「上廣之高」は $\dfrac{a_1h}{a_2-a_1}=630$、「上袤之高」は $\dfrac{b_1h}{b_2-b_1}=450$ であり、上注 (58)、(59) と同じ計算である。これらの積 $\dfrac{a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}=630\times450$ を「小冪二」とするが、これは「方法」の $\dfrac{1}{3}$ である。また、「下袤之高」は注 (59) の「上袤之高」と同様に、鉛直な断面上で下袤の上に立つ三角形の高さであり、$\dfrac{b_3h}{b_2-b_1}=\dfrac{130\times180}{40}=585$ のことである。これと「上廣之高」との積 $\dfrac{a_1b_3h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ を「中冪一」とする。

(68)「下袤之高」は、「截高」すなわち乙の台高と「上袤之高」との和であるということ。このことからこれが $\dfrac{b_1h}{b_2-b_1}+h_B=\dfrac{b_1h}{b_2-b_1}+\dfrac{b_3-b_1}{b_2-b_1}h=\dfrac{b_3h}{b_2-b_1}$ であることがわかる。「下廣之高」についても同様。

(69) 中冪 $\dfrac{a_1b_3h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ が $\dfrac{a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}+\dfrac{a_1h}{a_2-a_1}h_B$ に分解されるということで、

実際 $\dfrac{a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}+\dfrac{a_1h}{a_2-a_1}h_B=\dfrac{a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}+\dfrac{a_1h}{a_2-a_1}\cdot\dfrac{b_3-b_1}{b_2-b_1}h=\dfrac{a_1b_3h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ である。

(70)「下廣之高」$\dfrac{a_3h}{a_2-a_1}$ は、「下袤之高」$\dfrac{b_3h}{b_2-b_1}$ の積 $\dfrac{a_3b_3h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ を「大冪二」とし、「上袤之高」$\dfrac{b_1h}{b_2-b_1}$ の積 $\dfrac{a_3b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ を「中冪一」としている。

(71) 前注の「大冪」を、小冪 $\frac{a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ 、「上廣・上袤之高」と「截高」の積 $\frac{a_1h}{a_2-a_1}h_B+\frac{b_1h}{b_2-b_1}h_B$ および「截高」の冪 h_B^2 の和に分解できることを述べている。

実際、$\frac{a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}+\frac{a_1h}{a_2-a_1}h_B+\frac{b_1h}{b_2-b_1}h_B+h_B^2$

$=\frac{a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}+\frac{a_1h}{a_2-a_1}\cdot\frac{b_3-b_1}{b_2-b_1}h+\frac{b_1h}{b_2-b_1}\cdot\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}h+\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}h\cdot\frac{b_3-b_1}{b_2-b_1}h$

$=\frac{a_3b_3h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ である。

(72) 注 (70) の「中冪」$\frac{a_3b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ が小冪 $\frac{a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ と、「上袤之高」と「截高」の積 $\frac{b_1h}{b_2-b_1}h_B=\frac{b_1h}{b_2-b_1}\cdot\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}h$ の和に分解できることを述べている。

(73)「截高」の自乗の 2 倍である $2h_B^2$ と、小冪の 6 倍である $\frac{6a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$ 、「上廣之高」「上袤之高」と「截高」の積のそれぞれ 3 倍である $\frac{3a_1h}{a_2-a_1}h_B+\frac{3b_1h}{b_2-b_1}h_B$ について、これらの和を半分にすると述べている。したがって、小冪の係数は 3 であるし、「上廣之高」「上袤之高」と「截高」の積の係数は $\frac{3}{2}$ となる。

(74) 前注で求めた、各冪の和の半分に、「截高」を掛けたものを「積尺」とする。すなわち

$$\left(h_B^2+\frac{3a_1b_1h^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}+\frac{3}{2}\left(\frac{a_1h}{a_2-a_1}h_B+\frac{b_1h}{b_2-b_1}h_B\right)\right)h_B$$

が「積尺」である。

訳：これはまさに 6 を乙の積に掛け、台の高を 2 回掛け、上下の広の差を袤の差に掛けたもので割るのである。さらに台高を上広に掛け、広の差で割って、上広の高とする。さらに台高を上袤に掛け、袤の差で割って、上袤の高とする。上広の高を上袤の高に掛けて小冪 2 とし、下袤の高に掛けて中冪 1 とする。およそ下袤・下広の高は、すなわちこれは截高と上袤・上広の高とが合わさったものなのである。しかし、ここに中冪があるのは必ず小冪 1 が有るということで、さらに上広の高を截高に掛けて面積とするものの、それぞれ 1 つずつになる。さらに下広の高は下袤の高に掛けて大冪 2 とし、上袤の高に掛けて中冪 1 とする。その大冪の中にまた小冪 1 がある。また上広・上袤の高が有るものは、それぞれ截高に掛けて中冪が各々 1 とする。さらに截高を自乗して冪 1 とする。その中冪の中には小冪 1 が有り、さらに上袤の高を截高に掛けて冪 1 とする。そうであるので直ちに截高は自乗して冪 2 とし、小冪は 6 倍して、さらに上広・上袤の高をそれぞれ 3 倍し、それで截高に掛けて冪 6 とする。これら全部を半分にする。したがって 3 を小冪に掛けることになる。さらに上広・上袤の高はそれぞれ 3 倍し、今ただこれを半分にするだけなのであるから、それぞれ $1\frac{1}{2}$ 倍を得る。

したがってこれを３倍して２で割るのである。諸々の冪は截高に掛けて積尺とするのである。

（［二］術文③）

求羨道廣袤高術曰、以均賦常積乘二縣五十六鄉、又六因爲積。又以道上廣多下廣數加上廣少袤、爲下廣少袤。又以高多袤加下廣少袤、爲下廣少高、以乘下廣少袤爲隅陽冪。又以下廣少上廣乘之、爲鼈隅〈積〉[六]、以減積、餘三而一、爲實。幷下廣少袤與下廣少高、以下廣少上廣乘之、爲鼈從横廉冪、三而一、加隅〈陽〉[七]冪、爲方法。又以三除上廣多下廣、以下廣少袤・下廣少高加之、爲廉法、從。開立方除之、即下廣。加廣差、即上廣。加袤多上廣於上廣、即袤。加（廣）〈高〉[八]多袤、即道高。

校訂：［六］「積」字を脱す。李潢に従い補う。

［七］「陽」字を脱す。李潢に従い補う。

［八］「廣」は「高」の誤り。文脈より改める。

訓読：羨道の広袤高を求むるの術に曰う、均しく賦する常積を以て二県五十六郷に乗じ、又た六もて因し積と為す(75)。又た道の上広の下広より多きの数を以て上広の袤より少なきに加え、下広の袤より少なしと為す。又た高の袤より多きを以て下広の袤より少なきに加え、下広の高より少なきと為し(76)、以て下広の袤より少なきに乗じて「隅陽冪」と為す(77)。又た下広の上広より少なきを以て之に乗じ、「鼈隅積」と為し(78)、以て積より減じ、余は三にして一とし、実と為す(79)。下広の袤より少なきと下広の高より少なきとを併せて、下広の上広より少なきを以て之に乗じ、「鼈従横廉冪」と為し、三にして一とし、「隅陽冪」を加え、方法と為す(80)。又た三を以て上広の下広より多きを除し、下広の袤より少なき・下広の高より少なきを以て之に加え、廉法と為し(81)、従う。開立方して之を除けば、即ち下広なり(82)。広の差を加うれば、即ち上広なり。袤の上広より多きを上広に加うれば、即ち袤なり。高の袤より多きを加うれば、即ち道の高なり(83)。

注：(75) この「積」は羨道の体積の６倍。台と同様に労働力から計算して（13＋43）×6300×6＝2116800立方尺である。第３の術では、羨道の体積から、道の下広を求める。

(76) 羨道の上広c_1尺、下広c_2尺、袤d尺、高k尺とすると、注（44）に述べた関係から、「道上廣多下廣數」は$c_1-c_2=12$である。「下廣少袤」は$d-c_2=(d-c_1)+(c_1-c_2)=$

$104+12=116$、「下廣少高」は$k-c_2=(k-d)+(d-c_2)=40+116=156$である。

(77)「下廣少高」と「下廣少袤」の積$(k-c_2)(d-c_2)=116\times156=18096$を「隅陽冪」としている。

(78)「隅陽冪」と「道上廣多下廣數」の積$(k-c_2)(d-c_2)(c_1-c_2)=18096\times12=217152$を「鼈隅積」としている。

(79) 羨道は図２－２でスロープ状の実線と立体の裏側の点線で示したように、下広を高さとする真ん中の三角柱と、その両側で三角柱と底面を共有する２つの三角錐に分解される。羨道の体積をUとして、これを求めると

$$U=\frac{1}{2}dk\times c_2+\frac{1}{2}dk\times\frac{1}{3}(c_1-c_2)$$

$$=\frac{1}{2}(c_2+116)(c_2+156)c_2+\frac{1}{6}(c_2+116)(c_2+156)\times12$$

$$=\frac{1}{2}(c_2^3+(116+156)c_2^2+116\times156c_2)+\frac{1}{6}(12c_2^2+12\times(116+156)c_2+12\times116\times156)$$

となる。整理してc_2^3の係数を１にすると

$$\frac{6U-12\times116\times156}{3}=c_2^3+\left(\frac{12}{3}+(116+156)\right)c_2^2+\left(\frac{12\times(116+156)}{3}+116\times156\right)c_2$$

を得る。よって「実」は$\frac{6U-12\times116\times156}{3}=\frac{2116800-217152}{3}=633216$である。

(80)$((k-c_2)+(d-c_2))\times(c_1-c_2)=(116+156)\times12$を「鼈従横廉冪」としている。これの$\frac{1}{3}$倍と「隅陽冪」の和$\frac{((k-c_2)+(d-c_2))\times(c_1-c_2)}{3}+(k-c_2)(d-c_2)$

$=\frac{12\times(116+156)}{3}+116\times156=19184$が「方法」である。

(81)「廉法」は$\frac{c_1-c_2}{3}+((k-c_2)+(d-c_2))=\frac{12}{3}+(116+156)=276$である。

(82) 以上より、下広$c_2=y$の満たす３次方程式は

$$y^3+276y^2+19184y=633216$$

となる。これを解くと下広$c_2=y=24$尺が得られる。

(83) 上広は$c_2+(c_1-c_2)=24+12=36$尺、袤は$c_1+(d-c_1)=36+104=140$尺、高は$d+(k-d)=140+40=180$尺である。

訳：羨道の広・袤・高を求める術にいう、均等に賦役する常積を２県の56郷に掛け、さらに６倍して積とする。さらに道の上広の下広より多い分の数を上広の袤より少ない分に加え、下広の袤より少ない分とする。さらに高の袤より多い分を下広の袤より少ない分に加え、下広の高より少ない分とし、これを下広の袤より少ない分に掛けて「隅陽冪」とする。さらに下広の上広より少ない分をこれに掛けて、「鼈隅積」とし、これを積から引いて、残りは３で割り、実とする。下広の袤より少ない分と下広の高よ

り少ない分を併せて、下広の上広より少ない分をこれに掛けて、「鼈従横廉冪」とし、３で割って、「隅陽冪」を加え、方法とする。さらに３で上広が下広より多い分を割って、下広の袤より少ない分と下広の高より少ない分をこれに加え、廉法とし、従える。開立方してこれを除けば、それが下広である。広の差を加えれば、それが上広である。袤の上広より多い分を上広に加えれば、それが袤である。高の袤より多い分を加えれば、それが道の高である。

（［二］術文④）

求羨道均給積尺甲縣受廣袤術曰、以均賦常積乘甲縣一十三鄉、又六因爲積。以袤再乘之、以道上下廣差乘臺高爲法而一、爲實。又三因下廣、以袤乘之、如上下廣差而一、爲都廉、從。開立方除之、即甲袤。以廣差乘甲袤、本袤而一。以下廣加之、即甲上廣。又以臺高乘甲袤、本袤除之、即甲高。

訓読：羨道の均しく積尺を給し甲県の受くる広袤を求むるの術に曰う、均しく賦する常積を以て甲県一十三郷に乗じ、又た六もて因し積と為す(84)。袤を以て之に再乗し、道の上下の広の差を以て台の高に乗ずるを法と為して一とし、実と為す(85)。又た三もて下広に因し、袤を以て之に乗じ、上下の広の差の如くして一とし、「都廉」と為し(86)、従う。開立方して之を除けば、即ち甲の袤なり(87)。広の差を以て甲の袤に乗じ、本の袤にして一とす。下広を以て之に加うれば、即ち甲の上広なり。又た台高を以て甲の袤に乗じ、本の袤もて之を除けば、即ち甲の高なり(88)。

注：(84) 羨道の甲積をU_Aとすると、$U_A = 13 \times 6300 \times 1 = 81900$である。したがって「積」は$6U_A = 491400$となる。第４の術は、羨道の甲が担当した体積から、甲が担当した羨道の部分の下袤を求める問題である。

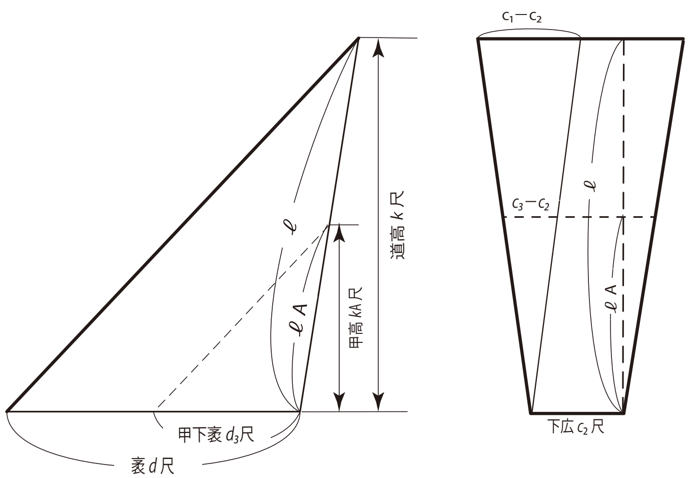


図２－８

(85) 注 (79) で述べたよ

うに、羨道の体積Uは

$U=\frac{1}{2}dkc_2+\frac{1}{6}dk\,(c_1-c_2)$

であった。甲の作る羨道の上広c_3尺、袤d_3尺、高k_3尺とすると

$U_A=\frac{1}{2}d_3k_3c_2+\frac{1}{6}d_3k_3\,(c_3-c_2)$

となる。ここで、羨道を袤辺を含む鉛直面で切った断面と、台に接触する方の面について図２－８に示す。相似関係から

$\frac{d_3}{d}=\frac{k_A}{k}=\frac{l_A}{l}=\frac{c_3-c_2}{c_1-c_2}$であるので、$k_3=\frac{d_3}{d}k$および$(c_3-c_2)=\frac{d_3}{d}(c_1-c_2)$が成り立つ。したがって

$$U_A=\frac{1}{6}\cdot\frac{k\,(c_1-c_2)}{d^2}d_3^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{kc_2}{d}d_3^2$$

となる。d_3^3の係数を１となるように整理すると、

$$\frac{6U_Ad^2}{k\,(c_1-c_2)}=d_3^3+\frac{3dc_2}{c_1-c_2}d_3^2$$

となる。この定数項$\frac{6U_Ad^2}{k\,(c_1-c_2)}=\frac{491400\times140^2}{180\times12}=4459000$が「実」である。

(86)「廉」は$\frac{3c_2d}{c_1-c_2}=\frac{3\times24\times140}{12}=840$である。前注の３次方程式には１次の項が無く、従えるものが廉だけであることから「都廉（全ての廉）」と呼んだのであろう。

(87) 以上の注より、d_3の３次方程式は$4459000=d_3^3+840d_3^2$となる。これを解けば甲の作る羨道の袤$d_3=70$が得られる。

(88) 注(85)で述べたように$\frac{d_3}{d}=\frac{k_3}{k}=\frac{c_3-c_2}{c_1-c_2}$であった。したがって甲の上広は

$c_3=(c_3-c_2)+c_2=\frac{(c_1-c_2)\,d_3}{d}+c_2=\frac{12\times70}{140}+24=30$尺である。また、甲の高は

$k_3=\frac{d_3}{d}k=\frac{70}{140}\times180=90$尺である。術文③では、台高を与えて２次方程式を解くことでも解けたはずであるが、そうしてはおらず、台と道で高さが異なる可能性も含んだ解法になっている。本題では「臺高」と「道高」が一致しているので問題とならないが、ここの術文の「臺高」は「道高」の可能性がある。

訳：羨道の均しく積尺を与えてそれに応ずる甲県の広・袤を求める術にいう、均等に賦役する常積を甲県の13郷に掛け、さらに６倍して積とする。袤を２回これに掛け、道の上下の広の差を台の高に掛けたものを法としこれで割って、実とする。さらに下広を３倍し、袤をこれに掛けて、上下の広の差で割って、「全ての廉」として、従える。開立方してこれを除けば、甲の袤となる。広の差を甲の袤に掛け、本の袤で割る。下広をこれに加えると、それが甲の上広である。また台の高を甲の袤に掛けて、本の袤で割ると、それが甲の高である。

参考文献

１）天禄琳瑯叢書『緝古算経』、郭書春主編『中国科学技術典籍通彙　数学巻１』（河南教育出版社、1993年）所収
２）王孝通『緝古算経』、孔継涵編『算経十書』所収、東北大学デジタルコレクション、藤原集書９、m01101、615-650
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100009843
３）郭書春、劉鈍点校『算経十書』所収『緝古算経』（九章出版社、2001年）
４）李潢『緝古算経考注』、郭書春主編『中国科学技術典籍通彙　数学巻４』（河南教育出版社、1993年）所収
５）張敦仁『緝古算経細草』、知不足斎叢書（乾隆45年（1780年））所収、国立国会図書館蔵
６）陳傑『緝古算経図解』（成都竜万育変堂、道光３年（1821年））、東北大学デジタルコレクション、藤原集書3191、m01408、55まで
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100009839
７）陳傑『緝古算経音義』（成都竜万育変堂、道光３年（1821年））、東北大学デジタルコレクション、藤原集書3191、m01408、56以降
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100009839
８）Tina Su Lyn Lim, Donald B. Wagner “The Continuation of Ancient Mathematics: Wang Xiaotong’s Jigu Suanjing, Algebra and Geometry in Seventh-Century China”（Nordic Inst of Asian Studies, 2017年８月）
９）大川俊隆「『張丘建算経』訳注稿（1）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編39号、2020年６月）
10）小寺裕、武田時昌「『九章算術』訳注稿（13）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編14号、2012年２月）
11）田村誠、吉村昌之「『九章算術』訳注稿（11）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編12号、2011年６月）
12）銭宝琮「王孝通『緝古算経』第二題・第三題術文疏証」（科学史集刊　第九期、1966年４月）、銭宝琮点校『算経十書』（中華書局、2021年１月）所収
13）小寺裕、武田時昌、張替俊夫「『九章算術』訳注稿（15）」（大阪産業大学論集　人文・社会科学編22号、2014年10月）