

TWAP 戦略を用いたラウンド・トリップ取引

久 納 誠 矢[†]

キーワード：アルゴリズム取引、機関投資家、TWAP 取引、マーケット・インパクト、取引所外取引

1. はじめに

近年、日本のみならず世界各国の株式等の取引環境が大きく様変わりしている。通信技術の発達によりナノ秒単位の取引が可能となる環境が整ってきたことにより、超高速で執行を行うハイ・フリークエンシー・トレーディング（HFT）業者が台頭してきた。アメリカにおける株式の HFT 出来高の割合は2011年以降横ばいであるものの2018年時におよそ52%のシェアを有する¹⁾。HFT 業者はコンピュータによるプログラムにより取引を行うこと（アルゴリズム取引）で市場の流動性を奪う一方で流動性の供給も行っている。しかし、超高速で取引を行うことにより容易に市場がクラッシュしてしまう危険性が叫ばれており、2010年5月6日にダウ工業30種平均が数分の内に出来高190億株に達し、9%という取引時間内過去最大の下げ幅を記録しそれに伴い、為替相場でも93円台から1ドル88円台へと急激な円高を記録したフラッシュクラッシュをはじめ、近年でもアルゴリズム高速取引により2019年1月の正月明けに為替相場が一瞬のうちに108円台から103円台になった事も記憶に新しい。このように様々な市場で超高速取引を用いた結果、ある経済的な（些細な）引き金により、システムが暴走し市場がクラッシュしてしまう危険性を有することに、アルゴリズムによる自動取引を行う際には注意を払う必要がある。一方で機関投資家等の大量の証券取引を行う主体はスピードのみならず、自身の株式等の取引により価格を極力動かさないように最適化を行い、更にトレーダーの主観を排除するためにアルゴリズムによる自動取引を行うことも増えてきた。また、近年では取引所外において自身の取引情報

[†] 大阪産業大学 経済学部 国際経済学科 准教授

草稿提出日 2020年6月30日

最終原稿提出日 2020年8月5日

1) TABB グループ (<https://research.tabbgroup.com/research>) より。

を隠し、大量の取引による市場への影響を考えなくて済む取引の場において流動性を模索している。しかし某運用会社の日東電工株式を対象とした相場操縦の例²⁾にもあるように、取引所の価格を参照する取引所外の存在により、相場操縦により利益を得ることのできる機会が存在していることも事実である。本稿で対象とするアルゴリズム取引はHFTのような高速取引ではなく、機関投資家に焦点を当てた、大量執行による流動性リスク³⁾のマネジメントである。

そのような環境下で、アルゴリズム取引を行う際には、まず初めにどのように売買を行えばよいのかに関する執行戦略(売買戦略)を定める必要がある。この執行戦略に関しては大きくIS法をもとにした戦略とベンチマーク法の2つに分けることができる。IS(Implementation Shortfall)法とは、機関投資家等が大量執行により不意に価格が変化してしまうというマーケット・インパクトを回避するためにアルゴリズム取引を利用するものが、株式の売買を決定した時点から実際にそれをファンド等に取り込むまでにかかった執行における費用を測定する方法である。売買を決定した時点におけるペーパー上の理想的な執行としては、手数料等の直接費用や、マーケット・インパクトによるコスト及び執行に時間がかかることによる価格変動コスト等の間接費用を考慮せずに計算を行うことになる。一方で実際に市場に赴き取引を行うと、これら直接費用と間接費用を無視することができない為、これらの費用をいかに減らし執行を完了するのを考えるのがIS法をもとにした戦略の考え方である⁴⁾。次に、ベンチマーク法としてはVWAP(Volume-Weighted Average Price: 出来高加重平均価格)⁵⁾やTWAP(Time-Weighted Average Price: 時間加重平均価格)⁶⁾をターゲットとしたものや、日中のある時間間隔を設定したうえで、ヒストリカルな出来高の割合分を維持するように執行量を調整していくPOV(Percentage of Volume)等がある。日本においては伝統的にVWAPをベンチマークとした執行が行われてきたが、近年は欧米流であるこのIS法をもとにした戦略をもちいた執行が機関投資家の中において主流となりつつある⁷⁾。次に、執行戦略を定めた後にバックテストを行い

2) 証券取引等監視委員会平成26年12月5日。

3) 売買したくとも売買できない、もしできたとしても需給の不均衡により価格の大きな変動を考慮しなければならないリスク。

4) より詳細に関してはPerold(1988)を参照。

5) VWAPは取引価格を日中の出来高で重み付けをした平均価格に近付ける執行方法である。等時間間隔で執行を行うのであれば、日中のヒストリカルな出来高曲線に合わせた割合で執行を行っていく方法である。

6) TWAPは時間間隔で重みを付けた平均価格をターゲットとした執行方法であり、等時間間隔であれば、毎期同じ量だけを執行していく戦略である。

7) 野村総研(2014)参照。

構築したアルゴリズムの頑健性を検証することになる。バックテストでは、対象銘柄の価格モデルを設定しシミュレーションや数値例を用い、執行に係る費用や動作を確認し最適化を行う。この際に、用いたアルゴリズムが暴走し市場をクラッシュさせるか否かの検証も必要となる。

本稿では実証研究及び理論研究で提案されている代表的な価格モデルを用いたアルゴリズム取引における相場操縦の可能性を、最も簡単な TWAP 取引を用いることにより数値例による検証を行う。その後取引所外を考慮に入れた際のその取引の場における手数料水準の提案を行う。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2 節で先行研究により提案されている価格モデルを紹介し、(純粋) 価格操作の定義を述べる。3 節では 2 節で紹介された価格モデルを用いて、TWAP 戦略を用いた期待取引費用の数値例に基づく比較を行う。4 節では単一の取引の場のみならず、2 つの取引の場が存在する場合に、各価格モデルによる TWAP 戦略による相場操縦に基づき考えられる取引所外取引における手数料の数値例に基づく比較を行い、5 節で結論を与える。

2. 価格モデルと取引戦略

アルゴリズム取引を行う際は、市場を上手く表す価格モデルを構築し、そのモデルを用いて様々な戦略からあがるパフォーマンスをバックテストにより比較することで精度を高める。本節では市場を表す価格モデルを先行研究から紹介し、期待執行コストを定義する。更に、Huberman and Stanzl (2004) による価格操作を定義する。

2.1 価格モデル

一般的に静的執行戦略による期待執行コストモデルの例として、時刻 t における株式のような危険資産の価格を P_t とし、執行前の価格を P_0 としたとき、以下の連続時間価格モデル

$$P_t = P_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t f(\dot{x}_s) G(t-s) ds + \int_0^t \sigma dB_s, \quad (1)$$

がよく用いられている。ここで、執行戦略は時刻 s ($0 \leq s \leq T$) における資産の保有量 x_s で与え、 \dot{x}_s は x_s を時間で微分した取引レート (単位時間当たり (瞬間) の執行量) を表している。また、 $f(\dot{x}_s)$ は時刻 s でのマーケット・インパクトであり、購入 (売却) 注文が約定 (執行) された際にどれほど価格が上昇 (下落) するかを表している。更に、

$G(t-s)$ は decay factor (レジリエンス) と呼ばれ, 購入(売却)の際に上昇(下落)した価格がどれほど元の水準に戻るのかに関する減衰率を表している。次に B_s を標準ブラウン運動とし, $\int_0^t \sigma dB_s$ をランダム項とする。最後に $\int_0^t \mu_s ds$ はドリフト項を表し, 市場におけるトレンドを表している。但し, アルゴリズム取引を行う際は日中で, また長くとも2~3日で執行を完了することがほとんどである為, ドリフト項は考えないことが一般的である⁸⁾。また, この価格過程は負の値をとる可能性もあるが, これに関しても長くとも日中のような短期間を考えることから, 幾何ブラウン運動ではなく算術ブラウン運動を用いて価格のモデル化を行う。以下では特別に断りのない限り, $\mu_s = 0$ とする,

$$P_t = P_0 + \int_0^t f(\dot{x}_s)G(t-s)ds + \int_0^t \sigma dB_s \quad (2)$$

で価格モデルを考える。 $\int_0^t f(\dot{x}_s)G(t-s)ds$ を見てもわかるように, 前の期に行った取引の影響は, その影響が時間とともに小さくなるものの, 取引価格に影響を与え続けることが見て取れる。特に第1期から始まる離散時間においては, $\Delta x_s := q_s$ とし, Z をランダムウォークとして,

$$P_t = P_0 + \sum_{s=1}^t f(q_s)G(t-s) + \sum_{s=1}^t \sigma Z_s \quad (3)$$

から見れば分かり易い。

さらに, 静的執行戦略の組を $\Pi = \{x_t; t \in [0, T]\}$ とし, IS法による期待執行コスト $C[\Pi]$ は,

$$C[\Pi] = E \left[\int_0^T \dot{x}_t (P_t - P_0) dt \right] = \int_0^T \int_0^t \dot{x}_t f(\dot{x}_s) G(t-s) ds dt \quad (4)$$

となる。最適執行問題とは各時点 t において, C を最小とする取引戦略 $\{x\}$ を求めていく問題である。また離散の T 回の取引においては

$$C[\Pi] = \sum_{t=1}^T q_t \sum_{s=1}^t f(q_s) G(t-s) \quad (5)$$

より理論的には計算が可能であるが過去の全ての執行の影響が価格へと反映される為, 一

8) 即ち, $\mu_s = 0$ とすることである。

般解の導出は容易ではなく、数値計算による検証がよく行われる。ここで、関数 f と G の具体的な形状であるが、最適執行問題における解析解の導出が可能となるモデル化等、実証研究や理論研究において様々なモデル化が行われており、ここで3つの価格モデルの例をあげる。

(i) 拡張 Almgren and Chriss (2000) (Almgren, Thum, Hauptmann, and Li (2005))

$$\begin{cases} f_1(\dot{x}_s) = \eta \sigma \dot{x}_s^\beta \\ G_1(t-s) = \delta(t-s) \end{cases} \quad (6)$$

η , β は推定パラメータであり、実証により $\beta = 0.6$ となる非線形インパクト関数を提案している。また、 δ を一定とし、時間に関して線形に価格が回復するモデルを採用している。

(ii) Bouchaud, Gefen, Potters and Wyart (2004)

$$\begin{cases} f_2(\dot{x}_s) = \ln(\dot{x}_s) \\ G_2(t-s) = \frac{k}{(l+t-s)^\gamma} \end{cases} \quad (7)$$

マーケット・インパクト関数は非線形あり、 k , l は定数、 $\gamma \approx \frac{1-\alpha}{2}$, α は買いか売りにおける取引符号の自己相関係数を表している。多くの実証では⁹⁾, γ はおよそ $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{3}$ の値をとることが多い。

(iii) Obizhaeva and Wang (2013)

$$\begin{cases} f_3(\dot{x}_s) = \lambda \dot{x}_s \\ G_3(t-s) = \exp\{-\rho(t-s)\} \end{cases} \quad (8)$$

λ を一定としてマーケット・インパクト関数は線形であり、指値注文板のどの価格帯にも一様に注文が入っているやや強い仮定を置いている。また、decay factor (減衰率) はパラメータ ρ で指数的に元の水準に回帰するモデルである。本モデルはより現実に則した価格が回帰する設定の下での明示的な解析解の導出を目的としており、本価格モデルを基にした最適執行戦略の導出が提案されている¹⁰⁾。

9) 例えば, Lillo, Mike, and Farmar (2005) 参照。

10) 指数レジリエンスと線形インパクトモデルにおける最適執行戦略の導出に関しては Kuno and Ohnishi (2015) を参照。

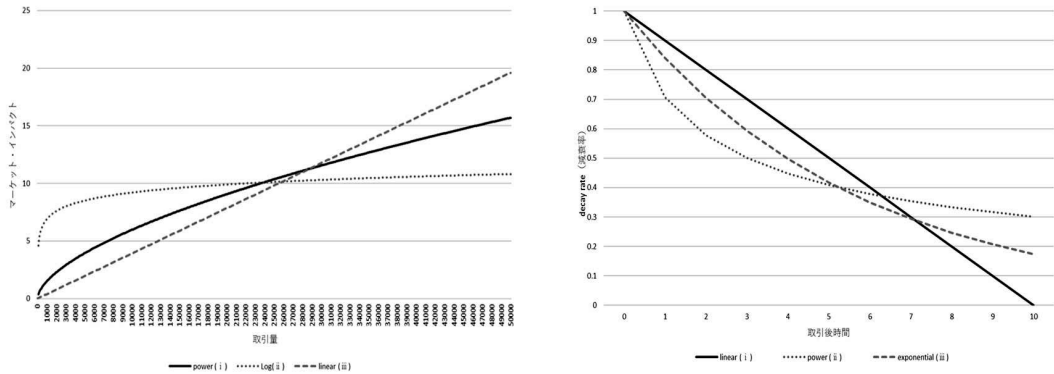


図1 単一証券の1回の購入におけるマーケット・インパクト関数 f と decay 関数 G の数値例

但し、50,000株までの価格の上昇の平均をいずれも9.82と合わせるために、 $\eta\sigma = 0.0238$, $\beta = 0.6$, $\lambda = 0.0003923$ としている。また、 G に関しては、実証研究に基づき $\delta = 0.1$, $l = k = 1$, $\gamma = 0.5$, $\rho = 0.6$ とおいた。

図1では、それぞれの価格モデルにおける1回の取引におけるマーケット・インパクト関数 f と decay 関数 G の数値例を表している。左図は10株から50,000株を購入した際の上記 (i) f_1 から (iii) f_3 の数値例を表している。右図に関しては減衰率を表す decay 関数 G の時間経過を表している。明らかに、1期目と2期目の取引の影響は10期目には、 $G(10 - 1) = G(9)$ 及び $G(10 - 2) = G(8)$ となり、いずれの価格モデルにおいても G は減少関数であることを表している¹¹⁾。

2.2 価格操作

次に、価格操作に関する定義を与える。価格操作の概念に関しては Jarrow (1992) により提案されて以来多くの研究がなされているが、ここではアルゴリズム取引の分野で最も一般的に用いられている、Huberman and Stanzl (2004) における定義を与える。本稿においてもこの定義を価格操作の定義として用いる。

定義1：ラウンド・トリップ取引（戦略）(Round-Trip Trade (Strategy))

取引戦略 $\{x_t; t \in [0, T]\}$ に関して、以下の等式を満たす取引をラウンド・トリップ取引と呼ぶ。

$$\int_0^T \dot{x}_t dt = 0. \tag{9}$$

より簡単に、 $t = 1, 2, \dots, T$ とした離散取引量 ${}^T Q = (q_1, q_2, \dots, q_T)$ に対して、

11) 関数の形状からも明らかなように $G(t - 1) > G(t)$ である。

$${}^T\mathbf{1}\mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

但し、 $\mathbf{1}$ は単位ベクトル、 ${}^T\mathbf{1}$ は単位ベクトルの転置を表している。即ち、執行期間における全ての執行された取引の量の和が0となる取引戦略のことである。

定義2：純粹価格操作（Pure Price Manipulation）

ラウンド・トリップ戦略 $\{x_t; t \in [0, T]\}$ に対して、以下のように厳密に負の期待費用をもつ取引戦略を（純粹）価格操作と呼ぶ。

$$E[C[x]] < 0. \quad (11)$$

ここで注意することとして、上記の価格操作は執行の行為そのものに対するもの（相場操縦）ではなく、執行の結果として現れているものに対していうものである¹²⁾。

本稿において、価格モデル（1）は純粹価格操作が不可能であるモデルである。純粹価格操作が不可能である条件として価格の回帰が線形であることが要請されている¹³⁾。

3. TWAP による取引コストの数値例

本節では前節において紹介した3つの価格モデルを用い（従って各取引は価格の変動を伴う）、単一証券を11期間の等時間間隔にラウンド・トリップ取引をすることを考える。また、簡単のため初期時点における該当証券価格を1,000円とする。

3.1 TWAP ラウンド・トリップ取引による価格モデルごとのパフォーマンス例

取引の仕方として2通りの取引の方法を考える。一つ目の方法として、初期において一括で50,000株購入し、その後の10期等間隔で每期5,000株ずつ売却する先一括のTWAPラウンド・トリップ取引（先一括TWAP-RT）を、二つ目として、同様の証券を先に初期から10期目までは5,000株ずつ合計50,000株をTWAP戦略にて購入し、これを最終期である11期目に一括ですべてを売却する後一括のTWAPラウンド・トリップ取引（後一括TWAP-RT）を考える。この先一括型と後一括型のTWAPラウンド・トリップ取引の執行パフォーマンスの違いを各価格モデルに対する数値例により検証する。ここで、

12) 行為に関する相場操縦の詳細はNTTデータ・フィナンシャル・ソリューションズ 先端金融工学センター編「アルゴリズム取引の正体」を参照。

13) 詳細はHuberman and Stanzl (2004)を参照。なお、「純粹」というのは価格操作の様々な定義が提案されているためである。他の例としてAlfonsi, Schied, and Slynko (2012)を参照。

TWAP 戦略は等時間間隔において毎期同じ量の執行を行う戦略となり最も簡単なアルゴリズム取引の一つであり、市場においてこの分割執行戦略を行う際に用いたラウンド・トリップ取引を、TWAP ラウンド・トリップ取引と呼ぶことにする。前節で触れたように、単一の取引の場を用いることによる TWAP ラウンド・トリップ取引では、decay factor（減衰率）が時間に関して線形であり、価格におけるドリフトが0であるような市場であれば、純粋価格操作は基本的には不可能である。また、この TWAP 戦略は減衰項が0である価格モデルにおいて、リスク中立的な価格に影響を持つ機関投資家の最適な執行戦略でもある¹⁴⁾。実務においては、ある単一証券の日中のヒストリカルボリュームライン（日中の出来高のヒストリカルデータ）をターゲットにした VWAP 戦略がよく用いられている一方で、日中におけるボリュームラインは実証研究においてU字をとることが多く報告されていることから¹⁵⁾、確定的なボリュームラインに基づく執行計画の策定が可能であること、更に TWAP における各期の執行量を適宜変化させることで容易に分析が可能であり、かつ分割執行の影響の考察が容易であることから、ここでは TWAP 戦略を用いた数値例から各価格モデルのパフォーマンスを考察する。以下では2節におけるパラメータ数値の設定を用いる¹⁶⁾。

図2はこの設定下において、50,000株の先一括 TWAP-RT の価格過程（左図）と後一括 TWAP-RT による期待価格過程（右図）の数値例である。(i) のべき乗インパクト関数

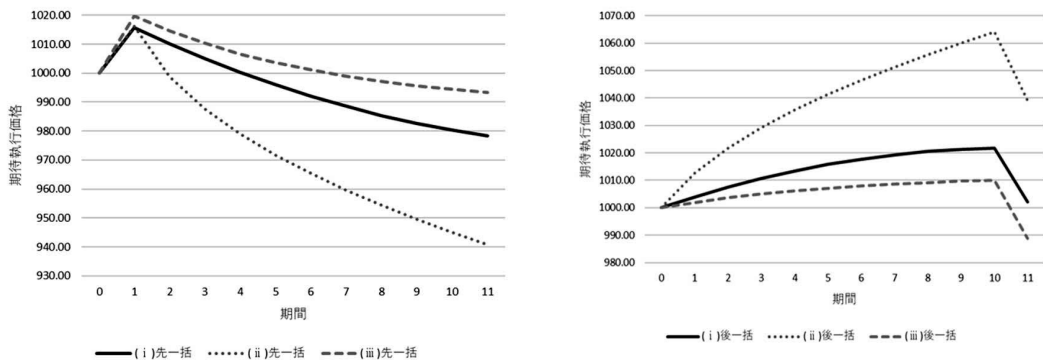


図2 3つの価格モデルの期待執行価格例

左図は先一括 TWAP-RT で執行を行った際の各期の期待価格及び右図は後一括 TWAP-RT で執行を行った際の各期の期待価格を表している。但しどちらも、初期時点における価格は1,000円としている。

14) 詳しくは Bertsimas and Lo (1998) を参照。

15) 即ち、取引開始寄り付き直後と取引終了である引け前に出来高が高くなることが多くの市場で報告されている。

16) $\eta\sigma = 0.0238, \beta = 0.6, \lambda = 0.0003923$, としている。また、 G に関しては、 $l = k = 1, \gamma = 0.5, \rho = 0.6$ とする。

と線形減衰を持つ価格モデルでは、他の二つの価格モデルに比べて先一括執行をする場合及び後一括執行する場合双方において、価格の振る舞いは平均的である。(ii) の対数インパクトとべき乗減衰を持つ価格モデルにおいては、価格のインパクトは取引量にかかわらずそれほど大きな違いがない一方で、価格の回帰スピードが早く取引の情報は長くまで価格に反映されるという性格から¹⁷⁾、この価格モデルに従う銘柄及び市場であれば損失も大きく出やすい一方で、場合によっては価格操作が可能となる。(iii) の線形インパクト及び指数減衰を持つ価格モデルの場合は、一括の前後によらず、期待執行コストが同じとなる。

この数値例を用いた場合の各期における執行コストと、期待執行コストを図3及び図4で表した。図3の棒グラフは一括執行におけるコスト（上図左）及び収入（下図右）を表しており、折れ線グラフでTWAPにおける各期の執行コストを表している。(i) の価格モデルは、価格の減衰に関しては強い仮定を置くが、マーケット・インパクトに関し

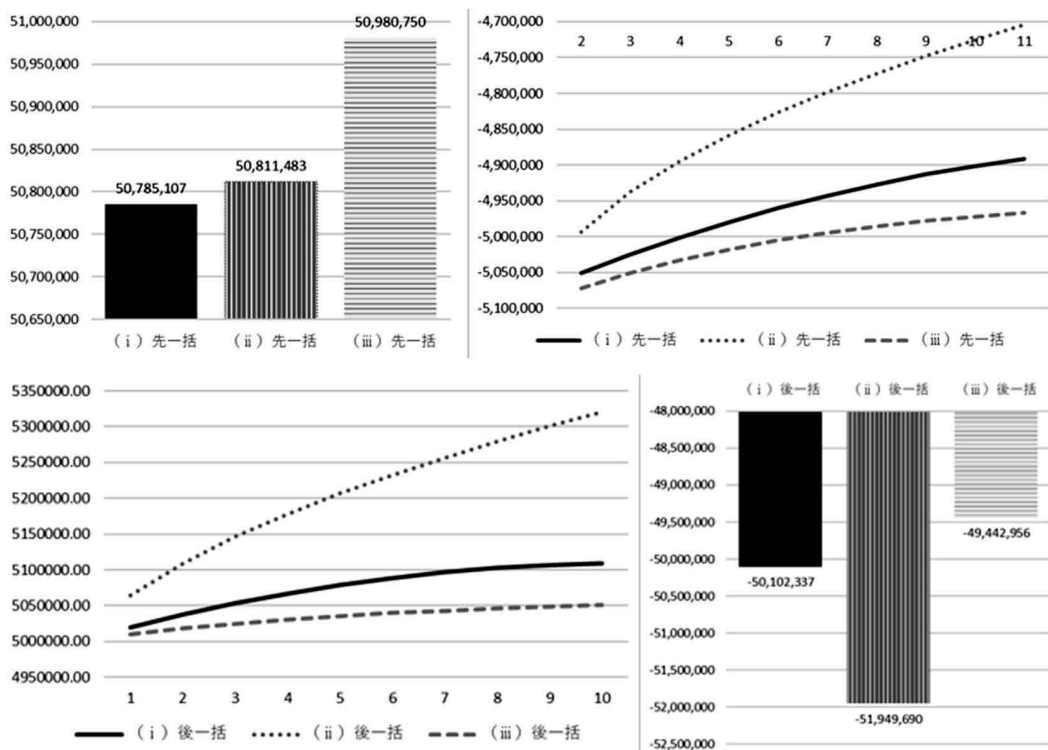


図3 先一括 TWAP-RT と後一括 TWAP-RT の各期における執行コスト

上図左は第1期における一括購入によるコストを、下図右は第11期における一括売却による負のコスト（収入）を表している。

17) 図1参照。

てはより現実的なモデルと認識されている。但しこの仮定を置くことにより、前述のように自動取引における純粋価格操作の可能性は否定される為、IS法に基づくアルゴリズム取引において最適執行量を導出する際には、本価格モデルが実務においても用いられていた。(ii)の価格モデルは、上図において先に一括購入した分の価格の上昇がそれほど大きくない一方で、価格の減衰速度が速いため、先に釣り上げた価格の上昇の影響を後のTWAPにおける売却で恩恵を受けにくくなっており、負のコスト(収入)が低くなっているのが見て取れる。一方で先にTWAPの小出しで価格を釣り上げていき、最後に上がった価格で一括売却する下図の戦略においては、価格の減衰速度は速いが、影響は長くまで残っているので、最終期における一括売却における収入が他と比べ大きくになっている。また、(iii)の価格モデルは線形インパクト関数を持つため、 $f(x_s)G(t-s)$ において価格の減衰は単純に量に比例する即ち、50,000株の執行と5,000株の執行影響は単純に10倍の差が出るだけである為、一括執行をどこにもってきても期待執行コストは等しくなる。また、(iii)の価格モデルを用いたアルゴリズム取引は他の価格モデルを用いた場合に比べて安定的に振舞うことも示唆されている¹⁸⁾。

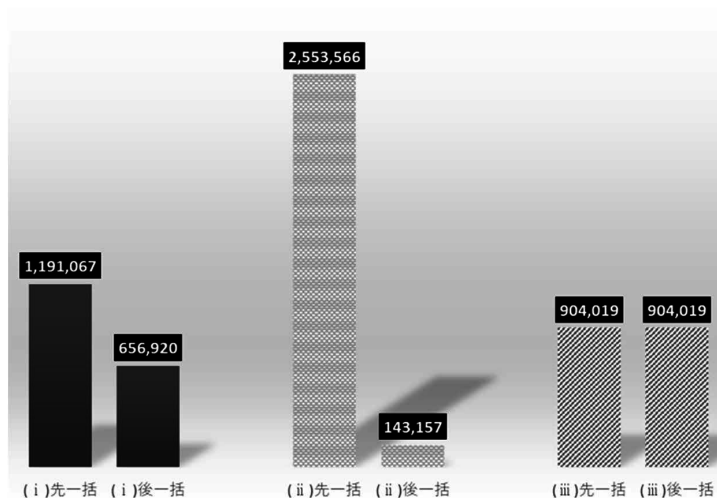


図4 3つの価格モデルの期待執行コスト

左側が先一括 TWAP-RT 取引による期待執行コスト、右側が後一括 TWAP-RT 取引による期待執行コストを表している。

18) より詳細に関しては、Alfonsi, Schied, and Slynko (2012) による Transaction-triggered price manipulation を参照。これは、線形マーケット・インパクトと exponential resilience (指数減衰) を持つ価格モデルのもとで、購入計画によりコストを下げようとする際に、途中で取引の符号を変える(売却を入れる)ことによっても、コストの減少が期待できない時に言うものである。この価格操作の定義は Pure price manipulation よりも強い定義である。

図4でこれら3つの価格モデルに対して、それぞれ2通りの取引における期待執行コストを比較したものである。特に(ii)の価格モデルを使用する場合は、市場の環境(設定するパラメータの値)次第で執行が結果的に価格を操作してしまう可能性がある。

3.2 TWAP ラウンド・トリップ取引における価格操作

使用する価格モデルによっては、市場の環境により純粹価格操作を行ってしまう可能性がある。図5は価格モデル(ii)を用いた先一括 TWAP-RT 取引と後一括 TWAP-RT 取引を用いたときの、単位執行量当たりの期待執行コスト(以降単に単位コストと呼ぶ)を表したものである。左図は先一括 TWAP-RT 取引の場合のラウンド・トリップ取引総量¹⁹⁾(RT 総量)に対する単位コストを表したものである。価格モデル(ii)においては、RT 総量が大きくなることにより、コストの変化量が小さくなり見にくくなるため、最小取引量水準で図示した。但し、モデルパラメータは前節までの設定に合わせている。先一括 TWAP-RT 取引を用いる場合、本設定の下においては単位取引量当たりのコストが単調に増加し、かつ負の期待執行コストを得ることはない。即ち価格操作が不可能である価格モデルとなる。これは、

$$\begin{aligned} f_2(5000) &= \ln(5000) \approx 8.52, \\ f_2(50000) &= \ln(50000) \approx 10.82, \\ G_2(t) &= \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

のもとで、少なくとも

$$f_2(50000)G_2(t+1) < f_2(5000)G_2(t) + f_2(5000)G_2(t-1)$$

即ち、

$$\frac{10.82(t+2)^{-\frac{1}{2}}}{8.52\left\{(t+1)^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right\}} < 1$$

を示すことができれば、先一括 TWAP-RT 取引において価格操作が不可能であることを示すことができ、以下でこれの略証を与える。

19) 購入総量 = 売却総量。

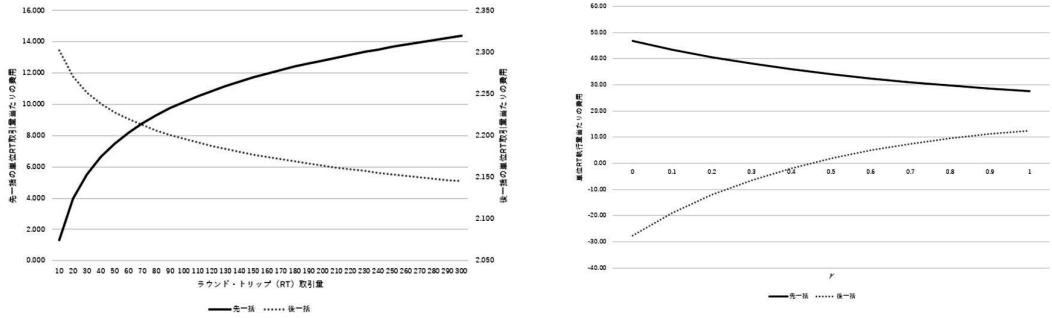


図5 価格モデル (ii) の先一括 TWAP-RT と後一括 TWAP-RT 取引による取引量における単位執行量当たりの費用(左図)と、 γ によるラウンド・トリップ取引の単位量当たりの費用(右図)

$y = x^{-\frac{1}{2}}$ は単調減少かつ凸であり、 $g(t) = \frac{(t+2)^{-\frac{1}{2}}}{(t+1)^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}}$ とおくと、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $g \rightarrow 0.5$ であり、また、 $t \downarrow 0$ としたとき、 $g \rightarrow 0.707107\dots$ である。よって、

$$\frac{10.82(t+2)^{-\frac{1}{2}}}{8.52 \left\{ (t+1)^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \right\}} < \frac{10.82 \times 0.70711}{8.52} < 0.898 < 1.$$

但しこの証明は、一般的な先一括 TWAP-RT 取引についていっているものではなく、現在の数値上の設定に対して言える十分条件である。例えば、 $\frac{f_2(50000)}{f_2(50000)} > \frac{1}{0.70711}$ となる下では、別の十分条件が必要となる。

一方で、後一括 TWAP-RT 取引の場合は RT 総量がこの設定においては 10^{21} 位から純粋価格操作戦略となる。すなわち、本パラメータの設定の下においては、現実的に純粋価格操作が不可能となるモデルであるといえるが、理論的には純粋価格操作が可能である。図

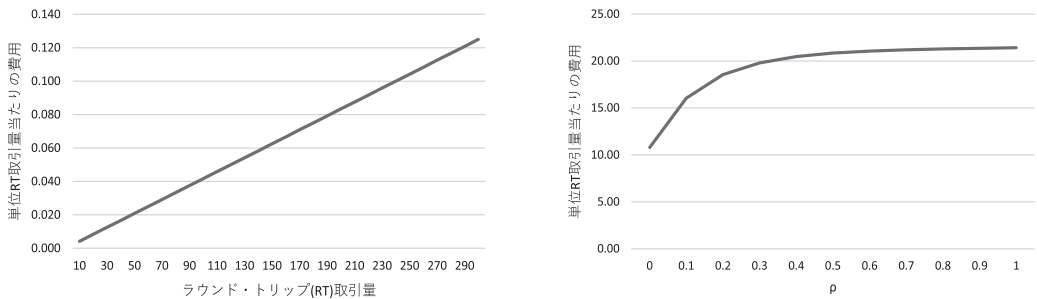


図6 価格モデル (iii) の RT 取引量に対する、単位 RT 取引量当たりの費用 (左図) と、 ρ の変化による単位 RT 取引量当たりの費用 (右図)

注意) 価格モデル (iii) においては先一括 TWAP-RT 取引と、後一括 TWAP-RT 取引の費用構造が全く同じとなるため、前者のみを用いた。

5の右図では $0.4 < \gamma < 0.5$ を境に、単位コストの符号が変わる。これは、執行によって変化した価格のその執行分の減衰が遅ければ遅いほど、徐々に小分けに購入してあげた価格がなかなか戻らないことを表しているのも、より多くの収益を得ることができることを示している。価格モデル (iii) における同様の議論から図示したものが図6である。(iii)のモデルでは前述のように純粋価格操作が不可能であるという定義よりも強い定義を満たしているため、先一括 TWAP-RT 取引において、単位コストは正値をとる。

4. 取引所外の取引における手数料

本節では、マーケット・インパクトを考慮する取引所において TWAP 取引を用いた購入により価格を上昇させた後、その価格においてマーケット・インパクトを考慮しない取引所外で売却する場合の、いわゆるゲーミング²⁰⁾による相場操縦が可能である状況の下で単純価格操作の出来ない手数料体系の構築とその比較を各価格モデルに対して行う。ゲーミングとは、主要な取引所において付けられている価格を操作し、その価格を参照している別の取引の場（取引所外）において大量の執行を行うことで、利益を得ようとする行動である。前節において検討した価格モデルにおいて単一の執行により価格変動する通常の取引の場を利用したラウンド・トリップ取引の場合の多くは、純粋価格操作が基本的に不可能であるものが多い。一方で、最後の一括売却時に価格が下落しないとなれば、ラウンド・トリップ取引により利益を得ることが容易に可能となる。本節では、前節において用いた価格モデルを用い、取引所においてそれぞれ同じ TWAP 水準となるパラメータの下で等量の購入を行い、ダーク・プール等の取引所外²¹⁾で売却する際に取引所外において機関投資家はその取引の場を提供する証券会社のような主体に支払うべき手数料の水準を比較する。但し、取引所外においては通常流動性が犠牲となり、計画量を執行することができないことが多いが、ここでは取引所外において十分流動性が存在するものとする。即ち、最後の一括執行は全ての量において可能であるとする。手数料は二つの取引の場をまたいだラウンド・トリップ取引において、価格操作不可能となる、期待利潤 $\pi = 0$ となる水準のみで比較する²²⁾。

TWAP 取引前の証券の価格を1,000円とし、前節までと同じ数値例を用い第1期から第

20) 詳しくは NTT データ・フィナンシャル・ソリューションズ 先端金融工学センター編「アルゴリズム取引の正体」を参照。

21) 価格を参照市場で合わせるものとし、取引量により価格の変動を考えない取引の場。

22) 詳細は Kuno, Ohnishi, and Shimizu (2017) を参照。実務上は価格操作のみならず、さらに複雑な状況も考慮した手数料水準の構築が必要となる。

10期まで5,000株購入することによる価格モデル (n) ($n = 1,2,3$) の第11期前の期待価格 $E[P_n]$ 及び, TWAP のみの期待購入コスト $C_{n,TW}$ は, (3), (5), (6), (7), (8) 式から,

$$E[P_1] = P_0 + \sum_{s=1}^{11} f_1(q_s)G_1(t-s) \cong 1017.74, C_{1,TW} = \sum_{t=1}^{10} q_t \sum_{s=1}^t f_1(q_s)G_1(t-s) \cong 50,759,258,$$

$$E[P_2] = P_0 + \sum_{s=1}^{11} f_2(q_s)G_2(t-s) \cong 1055.22, C_{2,TW} = \sum_{t=1}^{10} q_t \sum_{s=1}^t f_2(q_s)G_2(t-s) \cong 52,092,846,$$

$$E[P_3] = P_0 + \sum_{s=1}^{11} f_3(q_s)G_3(t-s) \cong 1008.47, C_{3,TW} = \sum_{t=1}^{10} q_t \sum_{s=1}^t f_3(q_s)G_3(t-s) \cong 50,346,975.$$

よって, それぞれの価格 $E[P_n]$ において50,000株を売却するとその期待利潤 $E[\pi_n]$ ($n = 1,2,3$) はそれぞれ,

$$E[\pi_1] = 50,000 \times E[P_1] - C_{1,TW} = 127,742,$$

$$E[\pi_2] = 50,000 \times E[P_2] - C_{2,TW} = 668,154,$$

$$E[\pi_3] = 50,000 \times E[P_3] - C_{3,TW} = 76,525.$$

この計算により, 想定する価格モデル及び取引所外における取引の量に応じて, 取引所外の取引の場を提供する証券会社の設定する手数料水準を定めることができる。ラウンド・トリップ取引総量 0 株から100,000株にたいして, 手数料水準がどのように変わるのかが図7に示されている。この図より, どのような価格モデルを用いても RT 取引総量 (機関

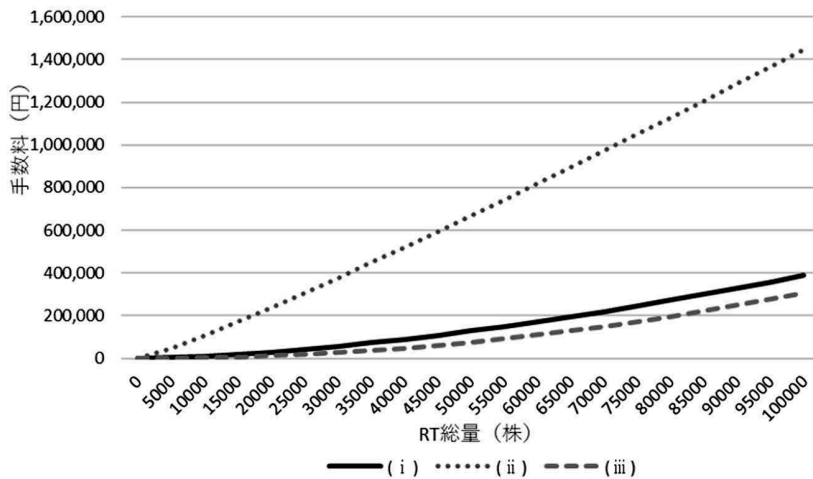


図7 3つの価格モデルの RT 総量に対する手数料水準

取引所外一括 TWAP-RT 取引における手数料水準を表している。

投資家の視点から、取引所外で売却する量）に対して手数料は増加することが見て取れる。また、減衰の仕方が線形であっても手数料の水準は非線形に上昇することも見て取ることができる。さらに、本手数料水準は TWAP による価格の変動 $\sigma_n^2 (n = 1, 2, 3)$ に依存していることが数値計算より予想され²³⁾、価格モデル (ii) が高い手数料を要求することがわかる。この手数料やボラティリティ水準への依存性に関する証明や、より一般の議論に関しては今後の課題として残す。この手数料水準を参考とすることで、最も単純な TWAP を機関投資家が用いると仮定したときに、機関投資家に利益を与えることが不可能となり、複数の取引の場をまたいだゲーミングを防ぐ根拠の一つとなりえる。

5. 結論

本稿ではラウンド・トリップ取引に TWAP 戦略を用いた際の執行コストの価格モデルごとの比較や価格操作に関する考察を数値例により行った。価格上昇の平均を揃えたパラメータの設定の下で、価格の減衰の方法により負の期待執行コストが得られる可能性を示した。また、線形マーケット・インパクト関数と指数減衰 (exponential resilience) を持つ価格モデルが、アルゴリズムを安定的に作用し意図的に価格操作を行っていないことの裏付けとしても有用なものであることを示した。指数減衰 (exponential resilience) はべき乗減衰に比べて、実証研究の結果による一般的なパラメータの設定の上でトータルにおける平均減衰率をそろえると、期間が長くなるほど減衰幅が大きくなる一方で減衰スピードは緩やかなものとなる。このことから、価格のボラティリティもべき乗減衰する価格モデルの方が大きくなり、ラウンド・トリップ取引のやり方によっては利益を得ることができることを示した。これら解析的な証明に関しては今後の課題として残す。

参考文献

- Alfonsi, A., Schied, A., and Slynko, A.: Order Book Resilience, Price Manipulation, and the Positive Portfolio Problem. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **3**, 511-533, (2012).
- Almgren, R. and Chriss, N.: Optimal Execution of Portfolio transactions. *Journal of Risk*, **3**, 5-39, (2000).
- Almgren, R., Thum, C., Hauptmann, E., and Li, H.: Equity market impact. *Risk*, **18**, 57-62, (2005).
- Bertsimas, D. and Lo, A., W.: Optimal Control of Execution Costs. *Journal of Financial Markets*, **1**, 1-50, (1998).

23) 本稿の設定におけるこのボラティリティの値は、 $\sigma_1^2 = 34.54$, $\sigma_2^2 = 291.48$, $\sigma_3^2 = 8.64$ である。

- Bouchaud, J. P., Gefen, Y., Potters, M., and Wyart, M.: Fluctuations and response in financial markets: the subtle nature of 'random' price changes. *Quantitative Finance*, **4**, 176-190, (2004).
- Huberman, G. and Stanzl, W.: Price Manipulation and Quasi-arbitrage. *Econometrica*, **72**, 1247-1275, (2004).
- Jarrow, R.: Market Manipulation, Bubbles, Corners, and Short Squeezes. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **27**, 311-336, (1992).
- Kuno, S. and Ohnishi, M.: Optimal Execution in Illiquid Market with the Absence of Price Manipulation. *Journal of Mathematical Finance*, **5**, 1-14, (2015).
- Kuno, S. and Ohnishi, M., and Shimizu, P.: Optimal Off-exchange Execution with Closing Price. *Journal of Mathematical Finance*, **7**, 54-64, (2017).
- Lillo, F., Mike, S., and Farmer, J.D.: Theory for Long Memory in Supply and Demand. *Physical Review*, E71, 066122, (2005).
- Obizhaeva, A. and Wang, J.: Optimal Trading Strategy and Supply/Demand Dynamics. *Journal of Financial Markets*, **16**, 1-32, (2013).
- Perold, A., F.: The Implementation Shortfall. *The Journal of Portfolio Management*, **14**, 4-9, (1988).
- 祝迫得夫「日本における高頻度取引 (High Frequency Trading)の現状について」, 第1期 JSDA キャピタルマーケットフォーラム研究論文, 27-40, (2017).
- 野村総合研究所「運用会社から見た証券会社の評価」, 金融 IT フォーカス 4月特別号, (2014).
- NTT データ・フィナンシャル・ソリューションズ 先端金融工学センター編「アルゴリズム取引の正体」, きんざい, (2018).

Round-Trip Trade with TWAP Strategy

KUNO Seiya

Key Words : Algorithmic trading, TWAP trading, Institutional investor, Market impact, Off-exchange trading

Abstract

We define three types of price models, which change prices in response to the trading volume, then compare the execution performance of each price model using the Time-Weighted Average Price (TWAP) round-trip strategy. The TWAP strategy is one of the simplest execution strategies and makes it easier to analyze the performance, but it is difficult to prove analytically when we deal with the multi-period execution problem because the effect of each trade remains on the price for a long time. Therefore, we numerically show the execution performance according to the previous empirical research and then illustrate the possibility of the price manipulation for a price model with log market impact and power resilience function. Moreover, we assume two trading venues, the exchange with market impact and the off-exchange without market impact. Under this setting, we calculate the off-exchange transaction fee using the TWAP round-trip trading benchmark.