『九章算術』訳注†稿（30）

大　川　俊　隆†・田　村　　　誠††

中国古算書研究会

大川　俊隆、小寺　裕、角谷　常子

田村　誠、馬場　理惠子、張替　俊夫、吉村　昌之

Translation and Annotation of “The Nine Chapters on the Mathematical Art（九章算術）” Vol. 30

OHKAWA Toshitaka and TAMURA Makoto

Abstract

“The Nine Chapters on the Mathematical Art” was the oldest book of mathematics in China before the unearthing of “Suan-shu shu.” The aim of our research is to provide a complete translation and annotation of it including annotations of Liu Hui（劉徽）and Li Chunfeng（李淳風）from the viewpoint of our previous work on “Suan-shu shu.”

This is the thirtieth article based on our research and results in which we studied the problems 9 to 16 of Chapter 9, Gougu（句股）.

『九章算術』は『算数書』出土以前は数学書としては中国最古のものであった。我々は、我々の『算数書』研究を起点に、『九章算術』の劉徽注、李淳風注を含めた訳注を完成さ

† This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 24501252 and 25350388.

† 大阪産業大学 名誉教授

†† 大阪産業大学 全学教育機構 教授

草 稿 提 出 日　10月31日

最終原稿提出日　11月22日

せることを目的としている。

本論文では、句股章の算題［九］～［一六］に対する訳注を与える。

［九］今有圓材、埋在壁中、不知大小。以鐻鐻之、深一寸、鐻道長一尺。問徑幾何。
荅曰、材徑二尺六寸。
術曰、半鐻道自乘[16][17]、如深寸而一、以深寸増之、即材徑[18]。

訓読：今円材有り(43)、埋りて壁中に在り、大小を知らず。鋸を以て之を鋸(ひ)くに、深さ一寸、鋸道長さ一尺。問う、径幾何ぞ。

答えに曰う、材径二尺六寸。

術に曰う、鋸道を半にして自乗し、深寸の如くして一とし、深寸を以て之を増せば、即ち材径(44)。

注：(43) 岳麓書院蔵秦簡『数』に本題の原形と思われる算題が見える。即ち、

【11-4】「□有園材薶（埋）地、不智（知）小大、斲之、入材一寸而得平一尺、問、材周大幾可（何）。即曰、半平得五寸、令相乘也。以深一寸爲法、如法得一寸。有（又）以深益之、即材徑也」

である。【11-4】題が、仮に句股定理を用いて解かれたのだとすれば、両者の直角三角形の数値は同一（句が１尺、股が２尺４寸、弦が２尺６寸）で、よって両者の関係は疑い難い。ただ、秦代から漢初にかけての時期に句股定理が存していたのかは、断定し難い。句股定理と密接な関係にある開平方術が、『数』にも『算数書』にも見えず、後者では盈不足術を用いて平方根の近似値を求めているからである。

(44) 円材の半径をr、深さをd、鋸道を$2c$とすれば、直角三角形AODにおいて、弦r、句c、股$(r-d)$となり、$r^2=c^2+(r-d)^2$。これより、$2r=\frac{c^2}{d}+d$となる。すなわち、句と弦・股の差がわかっているときの、弦を求める公式（［七］題参照）、弦$=\left(\frac{句^2}{弦股差}+弦股差\right)\div 2$と基本的に同じである。これが「半鐻道自乘、如深寸而一、以深寸増之」である。本題では、$c=10\div 2=5$寸で、$d=1$であるので、具体的計算は、$2r=5^2\div 1+1=26$寸となる。図９②参照。

訳：今円材で壁中に埋まっているものがあり、その大きさは不明である。円材を鋸で切って行くと、深さが１寸になったところで、鋸が切った円材の幅は１尺となった。問う、円材の直径はいくらか。

答えにいう、２尺６寸。

術にいう、円材の幅を半分にして、自乗し、これを深さで割り、これに深さを足せば、円材の直径となる。

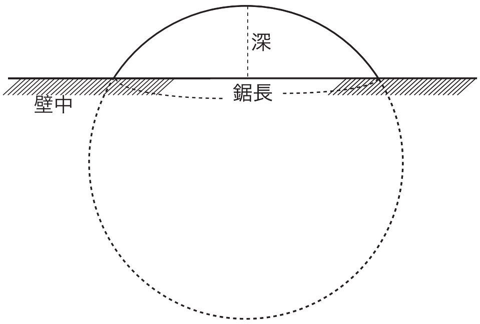


図９①

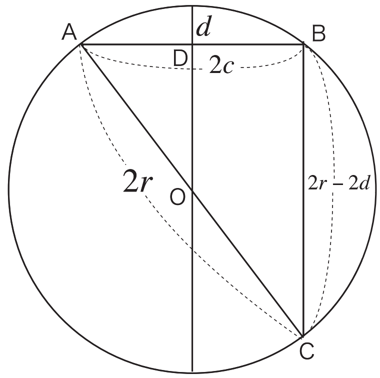


図９②

[16] [劉注] 此術以鐻道一尺句、材徑爲弦。鐻深一寸爲股・弦差之一半、故鐻長亦半之也。

訓読： 此の術、鋸道一尺を以て句と為し、材径を弦と為す。鋸深一寸を股・弦の差の一半と為す。故に、鋸の長も亦た之を半にする也(45)。

注： (45)「以鐻道一尺爲句、材徑爲弦」で劉注が想定しているのは、直角三角形ACBで、弦は2r、鋸道は１尺である。ところが、「鐻深一寸爲股･弦差之一半。故鐻長亦半之也」では、想定しているのは直角三角形AODのようである。これはおそらく計算をより簡単にするためであろう。「鐻道」は後半では「鐻長」と言い換えられているが、同じものを指す。

訳： この術では、（直角三角形ACBにおいて）鋸道１尺を句とし、円材の直径を弦として考える。ところが、鋸深１寸が句･弦の差の半分であるので、（直角三角形AODを考え）、鋸長もまた半分にするのである。

[17] 臣淳風等謹按、下鐻深得一寸爲半股・弦差。注云「爲股・弦差」者鐻道深也[一]。

校訂： [一]「注云爲股・弦差者鐻道也」の10字は李潢云う「句有舛誤」と。元の文意がわからないので、郭書春『訳注』も「無可校改、亦不訳」とする。今郭氏に従う。

訓読： 臣淳風等謹みて按ずるに、鋸を下すの深さ１寸を得て股･弦の差を半にすと為す。･･･

訳： 臣淳風等謹みて按じますに、鋸を下した深さは1寸を得て股･弦の差の半分とする、･･･

[18] **亦以半増之。如上術「去本」當半之、今此皆同半、差不復半也。**

訓読：亦半を以て之を増す。上術の「本を去る」の如きは当に之を半にすべきも(46)、今此れ皆な同に半にすれば、差は復た半にせざる也(47)。

注：(46)「去本」とは、本章第八題を指す。そこでは、「加差於幷」と、弦と股の差 (c－b) と弦と股の幷 (b+c) を足すことが行われており、(c－b) ＋ (b+c) ＝ 2c となり、c を求めるには最終段階で 2 で割らなければならない。これが「「去本」當半之」の意。注 (39) 参照。

(47) 本題では、注 (37) のように、円材の半径をr、深さをd、鋸道を2cとし、直角三角形AODを基に考える。弦r、句c、股 (r－d) となり、$2r = c^2 \div d + d$となる。AODは辺の数値が直角三角形ACDの半分であるので、弦と股の差はさらに半にする必要が無いことを云う。

訳：(「以深寸増之」とは、) またその半分を加える。上の「本を去る」術は最終的に全体を半にしなければならないが、今本題では、最初からともに半分にしているので、弦と股の差もさらに半にしないのである。

[一〇] 今有開門去閫一尺、不合二寸。問門廣幾何。

荅曰、一丈一寸。

術曰、以去閫一尺自乘、所得、以不合二寸半之而一、所得、増不合之半、即得門廣[19]。

訓読：今門を開け閫(48)を去ること一尺、合わざること二寸有り。問う、門の広幾何ぞ。

答えに曰う、一丈一寸。

術に曰う、閫を去る一尺を自乗し、得る所は、合わざる二寸を以て之を半にして一とし、得る所は合わざるの半を増せば、即ち門の広を得(49)。

注：(48)「閫」は「橛」、とじきみ、門の中じきりの義。『史記』馮唐伝「唐對曰、臣聞、上古王者之遣將也、跪而推轂、曰、閫以内者、寡人制之。閫以外者、將軍制之」集解「韋昭曰、此郭門之閫也。門中橛曰閫」。

(49) 直角三角形ABCを考え、「閫を去る」長さBCをa (句) とし、ABをb (股) とし、半門の広をc (弦) とすると、合わざる二寸の半分一寸が弦と股の差dとなる。よって、[七]題の公式$c = \left(\frac{a^2}{d} + d\right) \div 2$に$a = 10$、$d = 1$を代入すれば、$c = \left(\frac{10^2}{1} + 1\right) \div 2$となるが、求める門広は2cであるので、最後の÷ 2 の計算は不要。具体的計算は2c＝

$10^2+1=101$寸＝1丈1寸となる。図10①②参照。

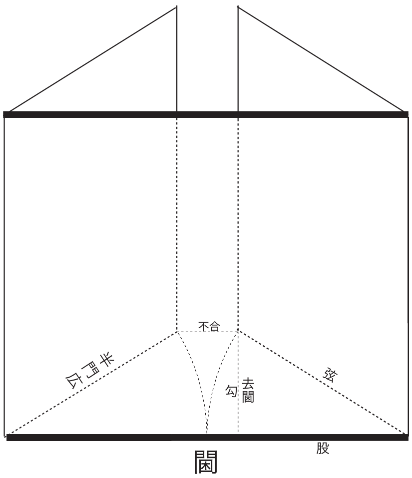


図10①

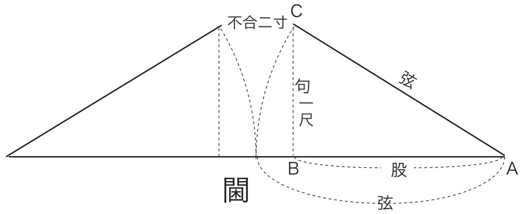


図10②

訳： 今門を開けると閫から1尺の距離で、両門が離れている距離が2寸であった。問う、門の広（幅）はいくらか。

答えにいう、1丈1寸。

術にいう、閫からの距離1尺（10寸）を自乗し、得られた値は、両門が離れている距離2寸を半分にした上でこれで割り、得られた値に両門が離れている距離2寸の半分を加えると、門の広（幅）が得られる。

[19] [劉注] 此去閫一尺爲句、〔半〕門廣爲（股）[弦][一]、不合二寸、以半之得一寸爲股·弦差、求弦。故當半之、今即以兩弦爲廣數、故不復半之也。

校訂：[一]「門廣爲股」では文意が通じない。李潢に従って、この句の頭に「半」字を加え、「股」も「弦」とする。

訓読： 此れ閫を去ること一尺を句と為し、門広を半にするを弦と為す。合わざる二寸は、以て之を半にし一寸を得て股·弦の差と為し、弦を求む。故に当に之を半にすべきも、今即ち両弦を以て広の数と為す、故に復た之を半にせざる也(50)。

注：(50)［七］題の注（34）に示した公式では、

$$弦=\left(\frac{句冪}{弦-股}+(弦-股)\right)\div 2=\left(\frac{句冪}{差}+差\right)\div 2$$

と本来なら最後に２で割るが、本題で求めるのは両弦であるので最後の２で割る計算は不要で、$\left(\frac{句冪}{差}\right)$の計算だけでよいという意。注 (49) 参照。

訳：本題では、閫との距離１尺を句とし、門の広（幅）の半分を弦とし、両門が離れている距離２寸は、半分にして１寸とし、これを弦と股の差として、弦を求める。公式を用いたなら、最後に２で割り半分にすべきなのだが、今は弦２つ分が門の広（幅）であるので、最後に２では割らないのである。

[一一]今有戸高多於廣六尺八寸、兩隅相去適一丈。問、戸高・廣各幾何。
荅曰、廣二尺八寸、高九尺六寸。
術曰、令一丈自乘爲實。半相多、令自乘、倍之、減實、半其餘、以開方除之。所得、減相多之半、即戸廣。加相多之半、即戸高[20]。

訓読：今戸高の広より多きこと六尺八寸なる有りて、両隅相去ること適に一丈。問う、戸高・広各おの幾何ぞ。

答えに曰う、広二尺八寸、高九尺六寸。

術に曰う、一丈をして自乗せしめ実と為す。相多きを半にし、自乗せしめ、之を倍し、実より減じ、其の余を半にし、開方を以て之を除す(51)。得る所は、相多きの半を減ずれば、即ち戸広。相多きの半を加うれば、即ち戸高(52)。

注：(51)［一〇］題までは股弦差と句の長さより弦・股の数値を求めるものであったが、本題は句股差と弦の長さより句と股の数値を求める術である。図11①参照。今、戸広を句、戸高を股、両隅の距離を弦とすると、戸高より戸広を引いたものは、股－句である。

術の通り式を立てると、$\sqrt{(弦^2-2\left((股-句)\div 2)^2\right)\div 2}=(股+句)\div 2$。すなわち、この術の式は、(股＋句)÷2、即ち、戸広と戸高を足した値を半分にしたものを求める公式である。これを図形的に説明しているのが、劉注の「今此術先求其半・・・即戸高也」の部分である。注 (54) 参照。

弦に100寸を、股－句に68寸を代入して、

$\sqrt{(弦^2-2\left((股-句)\div 2)^2\right)\div 2}=(股+句)\div 2$を計算すると、

$\sqrt{(100^2-2(68\div 2)^2)\div 2}=\sqrt{\frac{10000-2312}{2}}=\sqrt{3844}=62$となる。

(52) 上で得られた数値から「相多きの半を減ず」とは、式で言えば、

$\frac{股+句}{2}-\frac{股-句}{2}=$ 句となり、句が求まる。具体的計算は、$62-\frac{68}{2}=28$寸、これが句、

戸広である。同様に、股、即ち戸高は、$\frac{股+句}{2}+\frac{股-句}{2}=$股であるので、$62+\frac{68}{2}=$ 96寸となる。

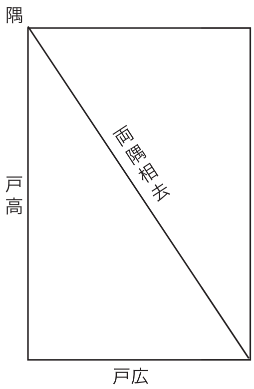


図11①

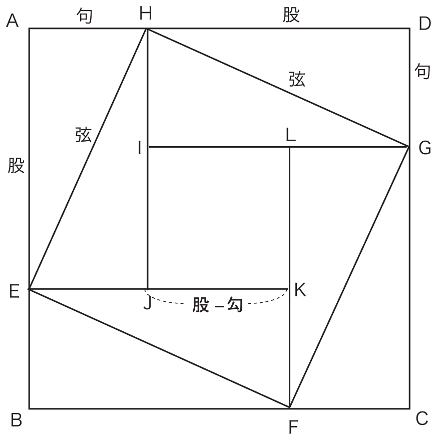


図11②

訳：今戸の高さが広より６尺８寸多く、対角の距離が１丈のものがある。戸の高さと広はそれぞれいくらか。

答えにいう、広は２尺８寸。高さは９尺６寸。

術にいう、１丈を自乗して実とする。高さと広の差を半分にして、自乗してから倍にし実から引いて、その余りを開平方する。得られた数値から高さと広の差の半分を引くと、戸広の長さとなる。また、得られた数値に高さと広の差の半分を足すと戸高の長さとなる。

[20] **[劉注]（令）[今]$_{[一]}$戸廣爲句、高爲股、兩隅相去一丈爲弦、高多於廣六尺八寸爲句・股差。按圖爲位、弦冪適滿萬寸。倍之、減句・股差冪、開方除之、其所得即高廣幷數。以差減幷而半之、即戸廣。加相多之數、即戸高也。**

今此術先求其半。一丈自乘爲朱冪四、黃冪一。半差自乘又倍之爲黃冪四分之二。減實、半其餘、有朱冪二、黃冪四分之一。其於大方棄四分之三、適得四分之一。故開方除之、得高廣幷數之半。減差半、得廣。加、得戸高。

又按此圖冪、句・股幷自乘、加差冪、爲兩弦冪。半之、開方得弦。今倍弦冪、減差冪、求句股幷。蓋先見其弦、然後知其句與股也。

句・股適等者、幷而自乘、即爲兩弦冪。皆各爲方。先見其弦、然後知其句與股者、倍弦冪、

即爲句·股適等者幷而自乘之冪。半相多自乘倍之、又半［句］[二]·股幷自乘亦倍之、合爲弦冪。其無差數者、「句・股各自乘幷之爲實」與「句・股相乘倍之爲實」、皆開方得弦。弦冪半之爲實、開方即得句・股。及股長句短、同源而分流焉。

假令句・股各五、弦冪五十、開方除之、得七尺、有餘一不盡。假令弦十、其冪有百、半之爲句・股二冪各得五十、當亦不可開。故曰圓三徑一、方五斜七、雖不正得盡理、亦可言相近耳。

其句・股合而自乘之冪、令弦自乘倍之爲两弦冪、以減之、其餘開方除之爲句・股差、加差於合而半之爲股。減差於合而半之爲句。［句］[三]・股・弦即高・廣・袤。

其出此圖也、其倍（弦）［股］[四]爲廣袤合、矩句即爲冪。得廣、即句·股差。其矩句之冪、倍［句］[五]爲從法、開之、亦句・股差。

其（餘）［一術］[六]、以句・股［差］冪減［弦冪］[七]、半其餘、差爲從法、開方除之即句也。

校訂：［一］文脈より、「令」は「今」に改める。

［二］李潢の校訂に従って、「半」と「股」の間に「句」字を入れる。

［三］文脈より、「股弦」の上に「句」字を脱しているので、今補った。

［四］下注（59）に従って、「弦」を「股」に改める。

［五］郭書春に従い、「倍」の下に「句」を補う。

［六］李継閔の『九章算術校証』に従って、「餘」を「一術」に改める。

［七］李継閔の『九章算術校証』に従って、「句股」の下に「差」字を、「減」の下に「弦冪」を補う。

訓読：今、戸広を句と為し、高を股と為し、両隅相去る一丈を弦と為す。高の広より多き六尺八寸を句・股の差と為す。図の位を為すを按ずるに、弦冪は適に万寸に満つ。之を倍し、句·股の差冪を減じ、開方して之を除せば、其の得る所即ち高·広の并数なり。差を以て并より減じて之を半にすれば、即ち戸広なり。相多きの数を加うれば、即ち戸高也(53)。

今、此の術先に其の半を求む。一丈自乗して朱冪四・黄冪一と為す。差を半にして自乗し又之を倍し、黄冪四分の二と為す。実より減じ、其の余を半にすれば、朱冪二·黄冪四分の一有り。其れ大方に於いて四分の三を棄て、適に四分の一を得。故に開方して之を除すれば、高・広の并数の半を得。差の半を減ずれば広を得、加うれば戸の高を得(54)。

又此の図の冪を按ずるに、句·股并せて自乗し、差冪を加うれば、両の弦冪と為る。之を半にし、開方すれば弦を得。今弦冪を倍し、差冪を減じ、句·股の并を求むるは、蓋し先に其の弦を見て、然る後に其の句と股とを知る也(55)。

句·股適に等しき者は并せて自乗すれば、即ち両の弦冪と為り、皆各おの方を為す。「先に弦冪を見て、然る後其の句と股とを知る」は、弦冪を倍すれば、即ち句・股適に等しき者并せて自乗するの冪と為る。相多きを半にし自乗し之を倍し、又句・股の并を半にして自乗し亦之を倍し、合わせて弦冪と為す。其の差数無き者は「句・股各おの自乗し之を并せて実と為す」と「句・股相乗じ之を倍して実と為す」と、皆開方して弦を得。弦冪は之を半にして実と為し、開方すれば即ち句・股を得。股の長く句の短きに及ぶも、同源にして分流す(56)。

仮令に句・股各おの五なれば弦冪五十、開方して之を除せば七尺を得て余り一有りて尽きず。仮令に弦十にして其の冪百有り。之を半にし句·股の二冪各おの五十を得、当に亦開くべからず。故に「円三径一」「方五斜七」は正に理を尽くし得ずと雖も、亦相近しと言うべきのみ(57)。

其れ句・股、合して自乗するの冪は、弦をして自乗し之を倍して両の弦冪と為し、以て之より減ずれば、其の余りは開方して之を除けば句・股の差と為す。差を合に加えて之を半にすれば股と為す。差を合より減じて之を半にすれば句と為す。句・股・弦は即ち高・広・袤(58)。

其れ此の図を出づる也、其れ股を倍して広·袤の合と為し、矩句は即ち冪と為せば、広を得、即ち句・股の差。其れ矩句の冪は倍して従法と為し、之を開けば、亦句・股の差(59)。

其の一術に、句・股の差冪を以て弦冪より減じ、其の余を半にして、差を従法と為し、法を開いてこれを除せば即ち句也(60)。

注：(53) 直角三角形AHEの弦HEを一辺とする正方形EFGHに対し、これを取り囲む正方形ABCDと内の正方形IJKLを図11②のように置く。弦^{2}すなわち弦冪は、正方形EFGHで示される。正方形IJKLは、(股－句)^2、すなわち差冪で示される。図から、弦冪×２は面積として正方形ABCD+正方形IJKLとなるので、2×弦冪－正方形IJKL＝正方形ABCDとなり、この正方形の一辺（股+句）はこれを開平方してやればよい。具体的計算は、$2\times1002-682=15376$, $\sqrt{15376}=124$ すなわち股+句は124である。これから股－句の68を引いて２で割ってやれば28、これが句（戸広）。股+句の124に股－句の68を足して２で割ると96、これが股（戸高）である。

ここで示される解法は、本題の術文で示される解法（その劉氏による解説は、以下の注（54）で示す）とはやや異なっている。これは、開平方する正方形の大きさの違いである。

(54) 上注で述べた解法に対して、「今此術先求其半・・・加、得戸高」は、本題の術

の$\sqrt{(弦^2-2((股-句)\div 2)^2)\div 2}$という公式が導かれる方法を図で説明している。上注で開平方したのは正方形ABCDであったが、ここでは、その$\frac{1}{4}$の正方形ASQTを考える。図11③参照。ASQTは、朱冪２と黄冪（差冪）$\frac{1}{4}$から成る。まず、弦冪＝朱冪４＋黄冪１であるので、ここから黄冪$\frac{2}{4}$を引く。すなわち、（朱冪４＋黄冪１）$-\frac{黄冪2}{4}$＝朱冪４＋$\frac{黄冪2}{4}$となる。この$\left(朱冪4+\frac{黄冪2}{4}\right)$を２で割れば$\left(朱冪2+\frac{黄冪1}{4}\right)$となり、正方形ASQTの面積となるので、これを開平方してやれば、$\frac{股+句}{2}$と、股と句の合計の半分が出る。したがって、$\frac{股+句}{2}-\frac{股-句}{2}$＝句、$\frac{股+句}{2}+\frac{(股-句)}{2}$＝股と、句・股それぞれが求められる。

具体的計算は、$\sqrt{(100^2-2(68\div 2)^2)\div 2}=\sqrt{2312}=62$として$62-\frac{68}{2}=28$で句が、$62+\frac{68}{2}=96$で股が求まる。

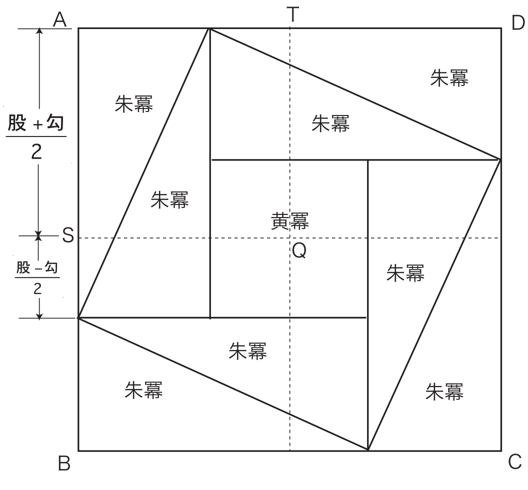


図11③

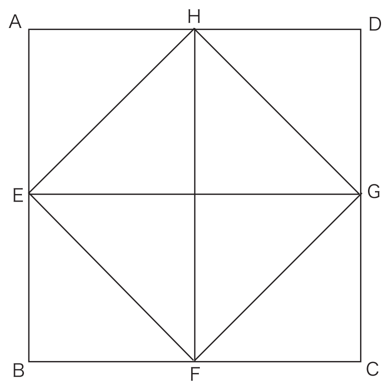


図11④

(55) ここでは、注（53）で述べられている解法が考え出される根拠を図を基にして述べる。句と股を併せてから自乗すると、正方形ABCDができる。これに股と句の差の自乗（正方形IJKL）を加えると、弦冪が２つできる。よって、この２つの弦冪を半分にして（すなわち１弦冪にして）、これを開平方してやれば弦が求められる。

だから、今「弦冪を倍し差冪を減じ、句・股の并を求むる」解法は、先に弦の値が得られていて、それから句と股の値を求めんとしているからであろう、というもの。

(56)「句・股適等者」以下の文も「先に弦冪を見て、然る後其の句と股とを知る」解法であることを言う。「句・股適等者」とは、句と股が同じ長さのものをいう。こ

の場合、句と股を併せて自乗したもの（正方形ABCD）が弦冪（正方形EFGH）２つとなる。図11④参照。よって、弦がわかっているときには 弦^2×2 を開平方してやれば句と股の和が出る。句と股に差がある場合には、上のように「相多きを半にし自乗し之を倍し、又句・股の并を半にし亦之を倍し、合わせて弦冪と為す」とやはり弦冪を求めるのである。句と股が同じ長さのものは、「句・股各おの自乗し之を并せて実と為す」という方法でも「句・股相乗じ之を倍して実と為す」という方法でも弦冪を求めることができ、これを開平方して弦を求めることができるし、逆に弦冪を半分にして実とし、これを開平方してやれば、同じ長さの句と股が求まる、という。だから、股が長く、句が短い場合も、その解法において、源は同じで、後に分流したに過ぎないのである、と言う。

(57)「假令句・股各五、弦冪五十」より以下は、「句・股適等者」の場合は、整数では開平方できないことを言う。例として、句・股が５の場合、弦が10の場合を挙げる。これらが、円における「周３、直径１」や正方形における「一辺５、斜辺７」と同じで、正確な値ではないが、一応近似値であることを言う。

(58)「其句・股合而自乗之冪」より以下は、句と股の和、および弦がわかっている場合の句と股の差の求め方を述べている。注（53）に述べたように、２弦冪－句股和^2＝股句差^2（黄冪）となるので、余りを開平方すれば、股と句の差が求まる。股と句の差が求まれば、これを句と股の和に足して半分にすれば股が、これを句と股の和から引いて半分にすれば句が求まることを言う。

(59)「其出此圖也」より以下は、「其倍弦爲廣袤合」の「弦」を「股」に改め、「倍爲従法」に「句」を補って「倍句爲従法」として釈読する。

ここで股を倍すると図11⑤のように、袤（AK）と廣（KL）を合わせたものになる。また「矩句」は図ABHGID 即ち長方形AFJK の面積を表す。

矩句＝股^2－句^2 、廣＝股－句（＝句股差）となり、この矩句の面積を句の２倍（GJ）を従法にして帯縦開平すれば廣が得られるのである。即ち

$$(股-句)^2+2句(股-句)=股^2-句^2 \quad \cdots ①$$

しかし、これは一般論として述べたことで、本題を解くのに必要な式ではない。なぜなら、本題では句股差＝68と与えられているので①式を必要とせずとも次注（60）に続くことができる。このようにして句股差がわかったならば、$\dfrac{弦^2-(股-句)^2}{2}$を実とし、股－句を従法として帯縦開平すれば句が得られるのである。即ち

$$句^2+(股-句)句=\frac{弦^2-(股-句)^2}{2} \quad \cdots ②$$

が成り立つ。おそらく、ここで劉徽が述べているのは「①式で句股差が求まれば、その句股差を用いて②式で句が求められる」ということではないだろうか。

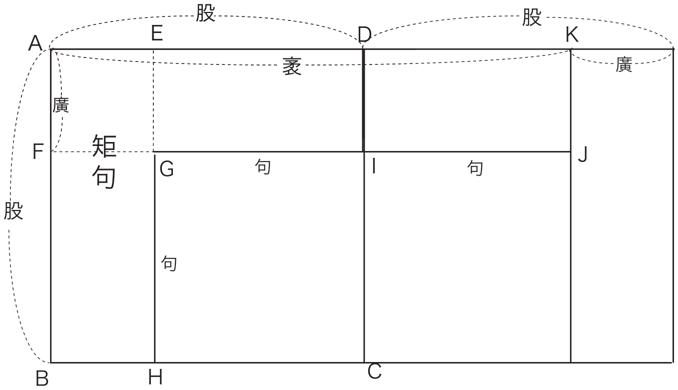


図11⑤

（60）この一術は次の計算を述べている。弦冪$c^2=100^2$から句股の差$b-c$の冪$(b-c)^2=68^2$を引けば、朱冪４つ分となる。これを２で割って朱冪２つ分にすると、これは句と股を掛けた長方形HIGDの面積となる。$(100^2-68^2)\div 2=2688$であるので、仮に句をxとすると、股は$x+68$であるので、長方形HIGDの面積は、$x(x+68)=2688$となる。よって、$x^2+68x=2688$となり１次の項の係数68が従法と呼ばれている。$x^2+68x=2688$のように、従法を伴った二次方程式を解くことを帯従開平という。

この帯従開平の方法は、①算木による法と②図形による法がある。

①は、訳注稿（10）の「開方術」の注（41）で示した方法と基本的に同一である。「開方術」の定法を「従法」と考えて行えばよい。図11⑥は、$x^2+68x=2688$を算木による法で解いたもの。

②は、広をxとし、縦を$x+68$とする長方形を考え、これを４つ集めた正方形を考える。図11⑦参照。

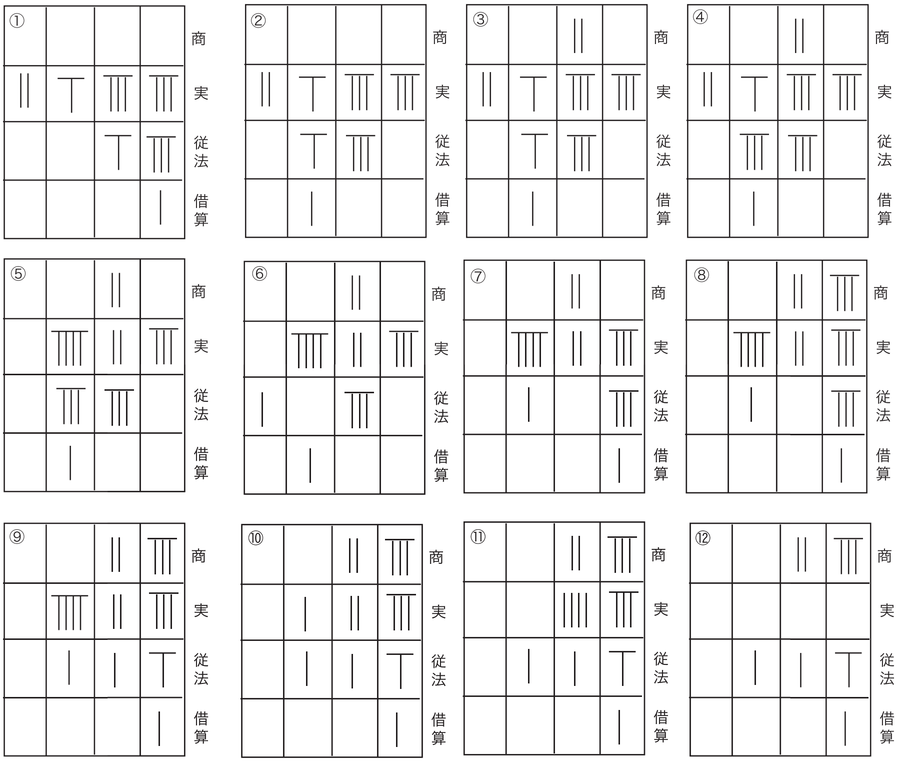
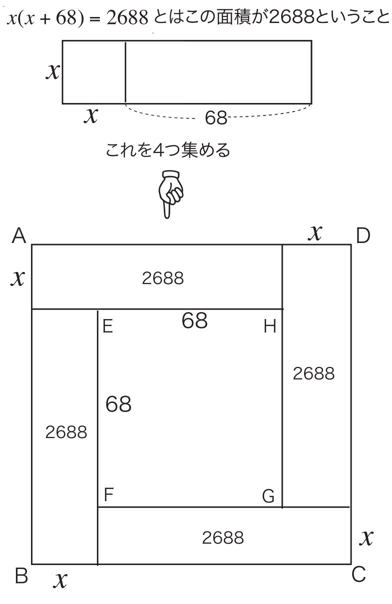


図11⑥算木図



$\square ABCD = 2688 \times 4 + 68^2 = 15379$
よって，$AB = \sqrt{15379} = 124$
$\therefore \quad x = (AB - EF) \div 2 = (124 - 68) \div 2 = 28$

図11⑦

訳：今戸の広を句とし、高さを股とし、両隅の間の距離１丈を弦とし、高さが広より多い６尺８寸を句・股の差とする。図中の各部位を考えるに、弦羃はちょうど１万平方寸となる。これを倍にし、句と股の差羃を引き、開平方すると、得られる数値は高さと広の和である。この和から差を引いて半分にすれば、戸広となる。これに多い分の６尺８寸を足すと、戸高となる。

今本題の術では、先に句と股の和の$\frac{1}{2}$を求めるもの。１丈（100寸）を自乗して、朱羃４と黄羃１とし、句と股の差を$\frac{1}{2}$にして自乗して（$\frac{1}{4}$とし）これを２倍すると、黄羃　$\frac{2}{4}$となる。弦の実（朱羃四・黄羃一）からこの黄羃$\frac{2}{4}$を引いて、その余りを$\frac{1}{2}$にすると、朱羃２・黄羃$\frac{1}{4}$が残る。この面積は、大正方形において、$\frac{3}{4}$の面積を棄て、ちょうど$\frac{1}{4}$の正方形の面積が残ることになる。ゆえにこの朱羃２・黄羃$\frac{1}{4}$を開平方すれば、高さと広の和の半分が得られる。この和から句と股の差の半分を引くと広が得られ、これに句と股の差を足すと戸の高さが得られる。

またこの図の羃を考えるに、句と股を併せて自乗し、差羃を加えると、２つの弦羃となる。だから、この２つの弦羃を半分にし、開平方すると、弦が得られる。今、弦羃を倍にしそこから差羃を引いて、句と股の和を求めているのは、おそらく先に弦の長さが出ているのを見て、そこから句と股の長さを知ろうとしたからであろう。

句と股が等しいものは、その和を自乗すると、２つの弦羃となり、和の方も、弦羃の方もおのおの正方形となる。「先に弦羃を見て、然る後其の句と股とを知る」というのは、弦羃を倍にすると、長さが等しい句と股の和の自乗の羃となる。（句と股に差がある場合は）、その差を半分にし自乗してから倍にし、さらに句と股の和を半分にして自乗してからさらにこれを倍にし、両者を併せて弦羃とする。句と股に差がない場合は、「句と股をそれぞれ自乗してこれらを併せて実とする」方法でもよいし、「句と股を互いに掛けてそれを倍にして実とする」方法でも、どちらもそれらの実を開平方して弦が得られる。弦羃を半分にして、開平方すれば句と股が得られる。このように、（句と股が同じ長さの者から）股が長く句が短い者に及んでも、その源流は同じで、やがて流れを異にしたものなのである。

仮に句と股がおのおの５であると、弦羃は50となり、開平方すると、７が得られ１が余って開きつくせない。仮に弦10だとその羃は100となる。これを半分にして句と股の２羃がそれぞれ50ずつとなり、やはり開きつくせない。ゆえに「円三径一」「方五斜七」は、理として正確さを尽くしていないけれども、また正解に近いと言うことができよう。

句と股を合わせて自乗した羃は、弦を自乗してから２倍して２つの弦羃としたもの

から引くと、その余りは、(句・股の差の冪となるので)、これを開平方すると、句・股の差が求まる。この差を句·股の和に加えて半分にすると股が求まる。この差を句·股の和から引き半分にすると句が求まる。句・股・弦はそれぞれ本題の高・広・袤である。

さて、この図から離れ(別の図形による解法を示すと)、股を倍にしたのが広と袤と合計となるので、矩句の冪ABHGIDは長方形AFJKの冪となるので、その広が得られ、これが句と股の差である。句は倍にして従法とし、これを開平方すると、また句·股の差である。

別の一術に次のような解法がある。句と股の差冪を弦冪から引き、その余りを半分にして、差を従法とし、これを開平方すると、句となる。

[一二]今有戸不知高·廣、竿不知長短。横之不出四尺、従(縦)之不出二尺、邪之適出。問戸高・廣・(袤)[袤]各幾何。
荅曰、廣六尺、高八尺、(袤)袤一丈。
術曰、従(縦)・横不出相乘、倍而開方除之。所得加従(縦)不出、即戸廣[21]。加横不出、即戸高。兩不出加之得戸(袤)[袤]。

訓読：今戸有りて高さ·広を知らず、竿は長短を知らず。之を横にすれば四尺を出ださず、之を縦にすれば二尺を出ださず。之を邪にすれば適に出ず(61)。問う、戸の高·広·袤(62)各おの幾何ぞ。

答えに曰う、広六尺、高八尺、袤一丈。

術に曰う、縦・横の出でざるは相乗じ、倍して開方もて之を除す。得る所は縦の出でざるを加うれば、即ち戸広。横の出でざるを加うれば、即ち戸高。両の出でざるを加うれば戸袤を得(63)。

注：(61) 本題で「不出」とは、竿が長くて戸広あるいは戸高から出せないこと。「不出四尺」とは竿が４尺分余るということ。「邪之適出」とは、斜めにしたときにちょうど出ること、つまり竿の長さが斜辺であるの意。本題は、句弦の差と股弦の差がわかっているときに、句・股・弦を求める問題である。図12①参照。

(62)「袤」と「邪」は同字。義は「斜」である。本題では、「袤」を名詞として、「邪」を動詞として使い分けているようである。

(63) 本題は、戸広を句、戸高を股、戸袤を弦とすると、句・弦の差（４尺）と股・弦

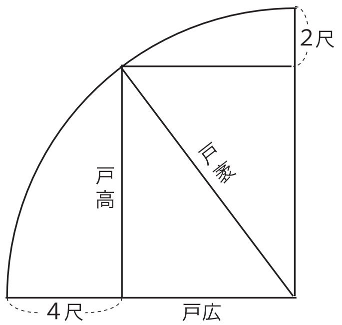


図12①

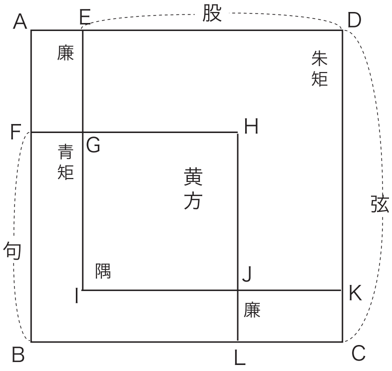


図12②

の差（２尺）がわかっているときの句・股・弦の求め方である。具体的な考え方は、次の劉注に詳しい。

句・弦の差と股・弦の差を掛け合わせたものを２倍すると、図12②のような正方形の黄冪となる。よってこれを開平方すると、黄冪の１辺が出る。これに股・弦の差を加えると、句が出、これに句・弦の差を加えると股が出、これに股・弦の差と句・弦の差を加えると弦が求まる。

訳：今戸があるが、その高さや広がわからず、竿は長さがわからない。この竿を横にすると戸の広から４尺分出ない。縦にすると戸の高さから２尺分出ない。これを斜めにすると、ちょうど戸の斜辺と合致する。問う、戸の高さ・広・斜は如何ほどか。

答えにいう、広は６尺、高さは８尺、斜は10尺。

術にいう、縦・横の出ない分を掛け合わせ、これを倍にした値を開平方する。得られた値に縦の出ない分を加えると、戸広となる。横の出ない分を加えると、戸高となる。縦・横２つの出ない分を加えると戸の斜めが得られる。

[21] **[劉注] 此以戸廣爲句、戸高爲股、戸袤爲弦。凡（幷）句・股（之冪即爲）[冪之在]弦冪**[一]**、或矩於表、或方於裏。連之者舉表矩而方之。又從句方裏令爲青矩之表、未滿黃方。滿此方、則兩端之廉重於隅中。各以股・弦差爲廣、句・弦差爲袤。故兩端差相乘、又倍之、則成黃方之冪。開方除之、得黃方之面。其外之青（知）[矩]**[二]**亦以股・弦差爲廣。故以股・弦差加之、則爲句也。**

校訂：[一]算経十書本は「幷句・股之冪即爲弦冪」に作るが、銭校本に「與下文「或矩於

表、或方於裏」語気不連」と云う。銭校本に従って「句·股冪之在弦冪」に改める。
[二]李潢の校訂に従って、「知」を「矩」に改める。

訓読： 此れ戸広を以て句と為し、戸高を股と為し、戸袤を弦と為す。凡そ句・股の冪の弦冪に在るは、或いは表に矩たりて、或いは裏に方たり(64)。之を連ぬる者表の矩を挙げて之に方たり(65)。又句方の裏より青矩の表と為さしむれば、未だ黄方を満さず。此の方を満すは、則ち両端の廉、隅中に重なる(66)。各おの股·弦の差を広と為し、句·弦の差を袤と為す。故に両端の差相乗じ、又之を倍すれば、則ち黄方の冪と成る(67)。開方して之を除せば、黄方の面を得。其の外の矩も亦股·弦の差を広と為す。故に股·弦の差を以て之に加うれば、則ち句と為す也(68)(69)。

注： (64) この両句の意は、句冪·股冪と弦冪の配置を図12②を基に考えるに、句冪が矩で表になった場合（ADCLHF）には、股冪は裏で正方形（FHLB）となる。逆に、股冪が矩で表になった場合（ABCKIE）には、句冪は裏で正方形（EIKD）となる、ということ。

(65) 上注のように、両者が連なっても、両者の一方が矩で挙げられると、他方は正方形となるという意。

(66) 今、同じ面積の、裏の句冪（EIKD）から青矩の表（ADCLHF）への移行を考えると、矩形（EDKJHG）は共通するが、黄方、即ち正方形（GIJH）が足りない。しかし、この黄方は、句矩（ADCLHF）と股矩（ABCKIE）が重なる部分である２つの「廉」（AFGEとCKJL）の和と面積が同じである、との意。

(67)「廉」は、「訳注稿（11）」の注（99）参照。その原義は、辺、側辺の意であるが、ここでは、矩句（あるいは矩股）の側辺にあるAFGEとJLCKを指す。１つの「廉」は、広が弦と股の差で、袤が弦と句の差だから、２つを掛けてさらに２倍すれば、黄方の面積となる、との意。

(68) 黄方の面積を開平方してやれば、正方形一辺の長さが出、これに弦と股の差を加えると、これが句となる、との意。

(69)具体的計算は、弦－股＝2、弦－句＝4 だから、この差どうしを掛けて２倍すると、(2×4) ×2＝16 と正方形の冪の面積となる。これを開平方すると$\sqrt{16}=4$ となり黄冪の１辺である。この４に弦・股の差２を加えると、句６が求まり、弦・句の差４を加えると８が求まる。弦は句より6＋4＝10でも、股より8＋2＝10でも求まる。

訳： 本題では、戸広を句とし、戸高を股とし、戸袤を弦とする。図を考えるに、句・股の冪と弦冪との関係は、句股の冪の一方が表で矩形であると、他方が裏で正方形である。両者を連ねると、一方が矩で挙げられると、他方は正方形となる。そこで、裏の句方

から青矩の表とする移行を考えると、ちょうど黄方部分が足りない。しかし、この黄方は、矩句と矩股が重なる隅の「廉」の部分と面積が同じである。そこで、1つの「廉」の面積を「弦と股の差」と「弦と句の差」を掛けることによって求め、さらにこれを2倍してやれば、黄方の羃となる。これを開平方してやれば、黄方の一辺が求まる。黄方の外の矩句の広も弦と股の差であるので、これを黄方の一辺に加えると、句が求まる。

[一三]今有竹高一丈、末折抵地、去本三尺。問、折者高幾何。
答曰、四尺二十分尺之十一。
術曰、以去本自乗[22]、令如高而一[23]、所得以減竹高而半其餘、即折者之高也[24]。

訓読：今竹の高一丈有りて、末折れて地に抵るに、本を去ること三尺(70)。問う、折るる者の高は幾何ぞ。

答えに曰う、四尺二十分尺の十一。

術に曰う、本を去るを以て自乗し、高の如くせしめて一とすれば、得る所は以て竹の高より減じて其の余を半にすれば、即ち折るる者の高なり(71)。

注：(70)「末」は先端。ここでは竹の上端を指す。高さ1丈の竹が中折れして、先端が地面の根元から3尺離れた所に至ったというのである。

(71) この問題では、折れた所の上の部分が斜辺（弦）となる直角三角形ができている。図13①参照。句を「去本三尺」、股を「折者高」とすれば 竹高=弦+股 で、句および股弦の和から股・弦を求める問題である。術文が表す式は

$$股=\frac{(弦+股)-\frac{句^2}{弦+股}}{2}$$

となる。その導出については下注(73)、(74) 参照。計算は

$$股=\frac{10-\frac{3^2}{10}}{2}=\frac{100-9}{20}=\frac{91}{20}=4\frac{11}{20}$$

である。

訳：今、高さ1丈の竹があり、先の方が折れて、根本から3尺離れた所に接地している。問う、折れている所の高さはどれだけか。

答えにいう、$4\frac{11}{20}$尺。

術にいう、根本からの距離を自乗し、竹高で割ったものを、竹高から減じて残りを半分にすれば、折れている所の高さである。

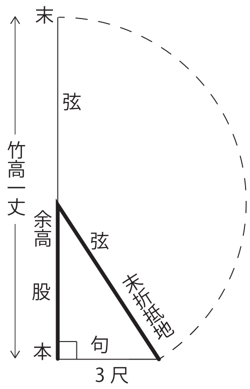


図13①

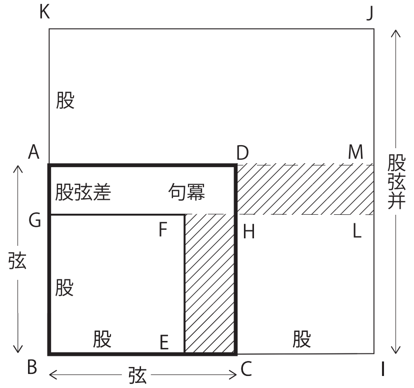


図13②

[22] [劉注] 此「去本三尺」爲句、折之餘高爲股、「末折抵地」爲弦。以句及股弦并求股。故先令句自乘見矩冪。

訓読： 此れ「本を去る三尺」を句と為し、之を折る余高を股と為し、「末折れて地に抵る」を弦と為す。句及び股・弦の并を以て股を求む。故に先に句をして自乗せしむれば矩冪(72)を現す。

注： (72) この「矩冪」は「句実之矩図」における矩形のこと。訳注稿 (29) 注 (28) 参照。

訳： この問題では「本を去ること三尺」を句とし、折れて残った高さを股とし、「末折れて地に抵る」を弦とする。句および股弦の和によって股を求める。したがって先に句を自乗すれば矩冪が現れる。

[23] [劉注] 竹高一丈爲股弦并、以除此冪得差。

訓読： 竹高一丈を股弦の并と為し、以て此の冪より除けば差を得(73)。

注： (73)「句実之矩図」において、「矩冪」は股弦差×（股＋弦）で表される。

股＋弦＝竹高、弦－股＝差であるから、竹高－差＝２股となる。

訳： 竹高１丈は股弦の和として、それで句冪を割ると股弦の差が得られる。

[24] 此術與繫索者之類更相反覆也。亦可如上術、令高自乘爲股弦并冪。去本自乘爲矩冪、減之、餘爲實。倍高爲法、則得折之高數也。

訓読： 此術は「繫索」なる者(74)の類と更に相い反覆する也。亦た上術の如くすべく、高をして自乗せしむれば股弦の并冪と為す。本を去るを自乗し矩冪と為し、之を減じ、余を実と為す。高を倍して法と為せば、則ち折るの高の数を得る也(75)。

注：(74)「繫索」は算題［七］の内容を指したもの。算題［七］では､股弦差と句から股･弦を求めていたのに対し、本題では股弦和と句から股・弦を求めている。そこで対になっていると言っているのである。

(75) ここでは「句実之矩図」で両辺をさらに股だけ延長した図で考える。図13②参照。句冪は矩形AGFECDの面積で表されるが、斜線をつけた長方形FECHの面積が長方形DHLMの面積と等しいので、句冪は大正方形KBIJを横断する長方形AGLMに等しく、股弦差×股弦和である。したがって股弦差$=\frac{句^2}{股弦和}$であり、2股＝股弦和－股弦差＝股弦和$-\frac{句^2}{股弦和}$であるので上注 (71) の式を得る。

訳：この術は繫索類の算題と互いに対をなすものである。また上術と同じようにでき、竹高を自乗させると股弦の和を一辺とする正方形の面積となる。根本からの距離を自乗して「句実之矩図」の矩形の面積を求め、これを減じて、残りを実とする。竹高を2倍して法として割れば、折れた所の高さが得られるのである。

［一四］今有二人同所立。甲行率七、乙行率三。乙東行、甲南行十步而邪東北與乙會。問、甲・乙行各幾行。

答曰、乙東行十步半、甲斜行十四步半及之。

術曰、令七自乘、三亦自乘、幷而半之、以爲甲邪行率。邪行率減於七自乘、餘爲南行率。以三乘七爲乙東行率[25]。置南行十步、以甲邪行率乘之、副置十步、以乙東行率乘之、各自爲實。實如南行率而一、各得行數[26]。

訓読：今二人立つ所を同じくする有り。甲の行率(76)は七、乙の行率は三。乙は東に行き、甲は南に行くこと十步にして東北に邪め(77)すれば乙と会う。問う、甲・乙の行くこと各おの幾行か(78)。

答えに曰う、乙の東に行くこと十歩半、甲の斜めに行くこと十四歩半にして之に及ぶ。

術に曰う、七をして自乗せしめ、三もまた自乗せしめ、併せて之を半にし、以て甲の邪行率と為す。邪行率は七の自乗より減じ、余は南行率と為す。三を以て七に乗ずるを乙の東行率と為す。南行十歩を置き、甲の邪行率を以て之に乗じ、副(べつ)に十歩を置きて、乙の東行率を以て之に乗じ、各自を実と為す。実、南行率の如くして一とすれば、各おの行数を得(79)。

注：(76)「行率」は速さ。

(77)「邪」は「斜」、斜めに行くの意。注(62)参照。以下の注・訳では「斜」字を用いる。

(78) 甲・乙の辿る経路は図14①を参照。本題は、句弦和と股の比および句の値がわかっているときに弦・股の値を求めるというもの。後の注[25]、[26]に従えば、まず句・股・弦の比を求め、比例関係を用いて股・弦の値を求めている。

(79) 後の注[25]では「斜行率」は「弦率」、「南行率」は「句率」、「東行率」は「股率」としている。本文の術に従って計算すると 斜行率$=\frac{7^2+3^2}{2}=29$, 南行率$=7^2-29=20$, 東行率$=7\times3=21$であり、これが順に弦・句・股の率（比）である。句が10歩であるので、比例関係を用いると甲は東北に斜めに$\frac{10\times29}{20}=14\frac{1}{2}$歩、乙は$\frac{10\times21}{20}=10\frac{1}{2}$歩となる。下注（84）、（85）参照。

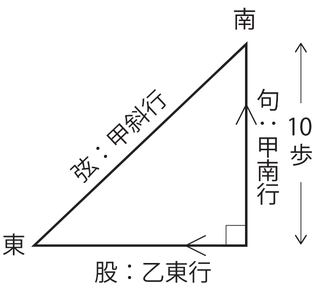


図14①

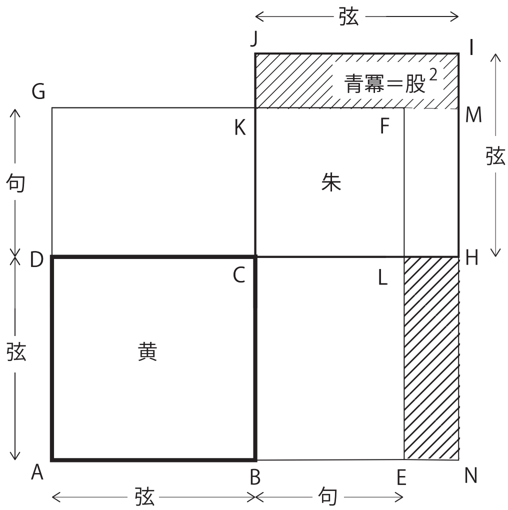


図14②

訳：今二人が同じ所から出発する。甲の速さは7、乙の速さは3である。乙は東に行き、甲は南に10歩行ってから東北方向へ斜めに向かうと乙に会った。問う、甲・乙の行った道のりはそれぞれどれだけか。

答えにいう、乙が東に行ったのは10歩半、甲が斜めに行ったのは14歩半で、出会う。

術にいう、7を自乗して、3もまた自乗して、合わせたものを半分にして、甲の斜行率とする。斜行率を7^2から減じて、残りを南行率とする。3を7に乗じて乙の東行率とする。南に行った10歩を置いて、甲の斜行率をこれに乗じ、それとは別に10歩を置いて、乙の東行率をこれに乗じ、それぞれを実とする。実を南行率で割れば、それぞれの道のりが得られる。

[25] [劉注] 此以南行爲句、東行爲股、邪行爲弦。句弦幷七。欲知弦者、當以股自乘爲冪、如幷而一、所得爲句弦差。加差於幷而半之爲弦、（以弦減差）［以差減弦］[一]、餘爲句。如是或有分、當通而約之乃定。術以句弦幷爲分母（差爲分子）[二]。故令句弦幷自乘爲朱・黃相連之方。股自乘爲靑冪之矩、令其矩引之直、加損同之。以句弦幷爲袤、差爲廣。其圖大體、以兩弦爲袤、句弦幷爲廣。引横斷其半爲弦率。七自乘者句弦幷之率。故弦減之、餘爲句率。同立處是中停也。列用率皆句弦幷爲袤、弦與句各爲之廣、故亦以股率同其袤也。

校訂：［一］「以弦減差」は文意と計算により「以差減弦」に改める。注（81）参照。

［二］「差爲分子」は衍字。李潢の校訂に従い削る。

訓読：此れ南行を以て句と為し、東行を股と為し、斜行を弦と為す(80)。句・弦の并は七。弦を知らんと欲すれば、当に股の自乗を以て冪と為し、并の如くして一とし、得る所は句弦の差と為すべし。差を并に加えて之を半にするを弦と為し、差を以て弦より減じ、余は句と為す(81)。是の如く或いは分有るは、当に通じて之を約し乃ち定むべし。術は句弦の并を以て分母と為す。故に句弦の并をして自乗せしめ、朱・黄相い連なるの方と為す(82)。股の自乗は青冪の矩と為し、其の矩をして之を引きて直とし、加損して之を同じうせしむ。句弦の并を以て袤と為し、差を広と為す(83)。其の図の大体は、両弦を以て袤と為し、句弦の并を広と為す(84)。横断するを引きて其の半を弦率と為す(85)。七の自乗なる者は句弦の并の率たり。故に弦は之より減じ、余は句率と為す。立つ処を同じくするも是れ中停する也。用率を列すれば皆な句弦の并を袤と為し、弦と句は各おの之の広と為す。故に亦た股率を以て其の袤に同する也(86)。

注：(80) 本題の状況は、甲の南行を句、斜行を弦、乙の東行を股とする直角三角形である。図14①参照。本注[25]では、句弦和と股の比から句・股・弦の比の求め方を述べている。

(81) 弦－（弦－句）＝句 である。

(82) 句弦の和を一辺とする正方形の各辺を句・弦の長さで分割すると、それぞれ句・弦を一辺とする正方形ができる。その前者を朱、後者を黄としている。図14②参照。

(83) 図14②で股冪之矩図を正方形JCHIのように置く。股冪之矩図で弦冪から句冪を除いた矩形は股冪に等しかった。これが青冪JKFLHIである。それを切り貼りすると、句弦の和と句弦の差を辺に持つ長方形FENMの面積に等しいことがわかる。すなわち 股^2＝（弦+句）×（弦－句）である。

(84)「袤」は長方形の長辺の意。青冪の直FENMでは「句弦の并」を指し、「其の図の大体」（GANM）では両弦ANを指す。

(85) 上注で作った長方形を句弦の和を一辺とする大正方形に連ねると、伸びた一辺

が２弦に等しい大長方形GANMができる。すなわち句弦和^2+股^2＝２弦×句弦和。その半分GABKは弦を一辺とする長方形であり、「弦率」は弦と句弦和との積、すなわちこの長方形の面積である。句弦和と股の行率比が７：３であるから、弦率＝$\frac{股^2+句弦和^2}{2}=\frac{3^2+7^2}{2}=29$となる。

(86) 句・股・弦の比率を、一辺を袤＝句弦和に揃えて、もう一辺を句・股・弦とする長方形の面積で表すということ。したがって、句率・股率・弦率はそれぞれ句・股・弦（の行率）に袤（句弦の和）を乗じたものを用いている。弦率=29であったから、句率＝$(弦+句)^2-弦率=7^2-29=20$、股率＝股×袤＝3×7＝21となる。

訳：この問題では南行を句とし、東行を股とし、斜行を弦とする。句と弦を合わせれば７。弦を知ろうとするので、股を自乗して股冪とし、句弦の和で割れば、得られたものは句弦の差となるのである。差を和に加えて半分にすると弦となり、弦を差より減ずると、残りは句となる。このようにするのに、分数があるときは、分母を通じて計算したものを約分すれば答えを定めることができる。術では句弦の和を分母とする。したがって句弦の和を自乗して正方形として、朱・黄は互いに連なる正方形とする。股の自乗を青冪の矩形として、その矩形の部分を引っ張って真っ直ぐにし、切り取った分を加えて面積が同じ長方形にする。句弦の和を袤として、差を広とするのである。その図の全体は、２弦を長辺として、句弦の和を短辺とする長方形である。横断線を引いて、その半分の長方形の面積を弦率とする。７は自乗すると句弦の和を一辺とする正方形になる。したがって弦率をこれから減じて、残りを句率とする。拠って立つ一辺を同じにして、もう一辺を途中で留めているのである。用いる率を列挙するとどれも句弦の和を長辺として、弦と句をそれぞれの短辺とする長方形の面積である。したがってまた股率もその長辺を用いた長方形の面積にして表すのである。

[26]南行十步者、所有見句、求見弦·股。故以弦·股率[乘][一]、如句率而一。

校訂：[一]李潢の校訂に従い「以弦・股率」の後に「乘」字を補う。

訓読：南行十歩なる者、所有は句を見て、弦·股を見るを求む。故に弦·股の率を以て乗じ、句率の如くして一とす。

訳：南行十歩の問題は、所有数である句より、弦・股を求めている。したがって弦・股の率を掛けて、句率で割るのである。

[一五]今有句五步、股十二步。問、句中容方幾何。

答曰、方三步十七分步之九。

術曰、幷句・股爲法。句・股相乘爲實。實如法而一、得方一歩[27]。

訓読：今、句五歩、股十二歩有り。問う、句中に容るる方は幾何ぞ。

答えに曰く、方三歩十七分歩の九。

術に曰く、句・股を并せて法と為す。句・股は相い乗じて実と為す。実、法の如くして一とすれば、方一歩を得(87)。

注：(87)「句中」の「句」は、「句股」の略で、直角三角形を指す。本題は直角三角形に入れることのできる最大の正方形の一辺を求める問題である。術に従って計算すると$\frac{5\times12}{5+12}=\frac{60}{17}=3\frac{9}{17}$歩となる。その求め方は下注[27]参照。

訳：今句が５歩、股が12歩である。問う、この直角三角形の中に入れることができる正方形はどれほどか。

答えにいう、一辺は$3\frac{9}{17}$歩。

術にいう、句・股を合わせて法とする。句・股は互いに乗じて実とする。実を法で割れば、一辺の歩数が得られる。

[27]**句・股相乘爲朱・靑・黄冪各二。令黄冪連於(下隅)[隅中]**[一]**、朱・靑各以類合、共成修冪。中方黄爲廣、幷句・股爲袤。故幷句・股爲法。**

冪圖方在句中、則方之兩廉各自成小句股。而其相與之勢不失本率也。句面之小股、股面之小句從(縦)横相連合而成中方。令股爲中方率、幷句・股爲廣率、據見句五歩而今有之、得中方也。復令句爲中方率、以幷句・股爲袤率。據股十二歩而今有之、則中方又可知。此則雖不效、而法實有(法)[二]**由生矣。(不)[下]**[三]**容圓率以今有・衰分言之、可以見之也。**

校訂：［一］大典本、楊輝本に従い「下隅」を「隅中」に復す。

［二］「法」は衍字。李潢に従い削る。

［三］戴震の校訂に従い「不」を「下」に改める。

訓読：句・股は相い乗じて朱・青・黄冪各おの二つと為す。黄冪をして隅中に連ならしめ、朱・青は各おの其の類を以て合し、共にして成して冪を修む。中方の黄を広と為し、句・股を并すを袤と為す(88)。故に句・股を并せて法と為す(89)。

冪図に方は句中に在れば則ち方の両廉、各自小句股を成す。而して其の相与の勢は本率を失わざる也(90)。句面の小股・股面の小句は縦横に相い連なり合して中方を為す(91)。股をして中方の率と為し、句・股を并すを広率と為さしむ。見句の五歩に拠

りて之を今有すれば、中方を得る也[92]。復た句をして中方の率と為し、以て句・股を并せて衺率と為さしむ。拠りて股十二歩にして、之を今有すれば則ち中方は又た知るべし[93]。此れ則ち效（なら）わずと雖も法・実由りて生ずる有り。下に容円率は今有・衰分を以て之を言えば、以て之を見るべきなり。

注：(88) 句・股を２辺とする長方形は、直角三角形２つ分である。求める正方形の部分を黄冪とし、それを除いてできる小さい直角三角形２種を朱・青としている。図15①参照。

(89) 朱・青の直角三角形をそれぞれ組み合わせると、短辺が正方形の１辺に等しい長方形ができる。これを連ねたものが図15②で、この大長方形の長辺は句股の和である。したがって、大長方形の面積を句股の和で割れば正方形の１辺が求められる。これが本文の解法である。

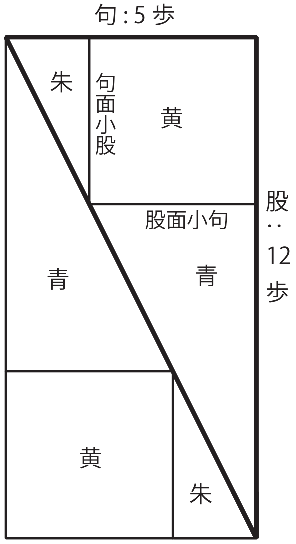


図15①

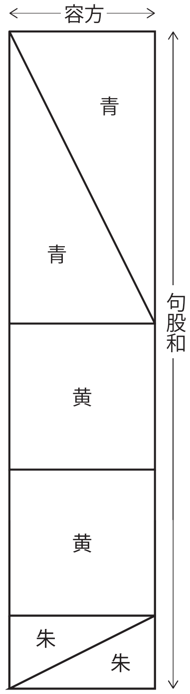


図15②

(90)「冪図に」以降の、注[27]の後半の文においては、相似を用いた解法を説明する。本題の解法と大きく異なり、今有術の用語を用いて説明している点などを考えると、李注の可能性が疑われる。

ここでは朱・青の直角三角形が直角三角形と共有する辺を小股・小句と呼んでいる。「相与の勢」は辺の比率。元の直角三角形から正方形を除くと、小さな直角三

角形が２つできる。これらは元の直角三角形と相似であり、辺の比が同じになっているということ。

(91)「中方」は黄冪の一辺。

(92) 朱と題意の直角三角形が相似であるから 股：股+句＝中方：句 である。

(93) 青と題意の直角三角形が相似であるから 句：股+句＝中方：股 である。

訳：句・股を互いに乗じると、朱・青・黄冪それぞれ２つずつとなる。黄冪を中に連ねて、朱冪・青冪はそれぞれ同じものを合わせ、それらを共にすれば長い長方形ができる。真ん中の黄の一辺を広として、句・股の和を袤とする。したがって、句・股を合わせて法とする。

元の冪図の正方形は直角三角形の中に在るので、正方形の両側にはそれぞれ小直角三角形ができる。その辺長の相与率は元の三角形の辺長の本率を失っていないのである。句辺中の小股・股辺中の小句は縦横に相い連なって中方（黄冪）となる。股を中方の率と為す。句・股の和を広率として、句５歩によってこれを今有すれば、中方が得られる。また句を中方の率とし、句・股の和を袤率として、股12歩によってこれを今有しても中方を知ることができる。これは同じものを用いているのではないが、法・実は（大小の直角三角形の）法の比率があって決めることができるものである。下の容円率は今有術と衰分術で求めているが、これも見るべきである。

[一六]今有句八步、股十五步。問、句中容圓徑幾何。
答曰、六步。
術曰、八步爲句、十五步爲股、爲之求弦。三位幷之爲法。以句乘股倍之爲實。實如法得徑一步[28]。

訓読：今句八歩、股十五歩有り。問う、句中に容るる円径は幾何ぞ。

答えに曰く、六歩。

術に曰く、八歩を句と為し、十五歩を股となし、之を為して弦を求む。三位は之を并せて法と為す。句を以て股に乗じ、之を倍して実と為す。実、法の如くして径一歩を得(94)。

注：(94) 本題は、直角三角形に入れることのできる最大の円の直径を求める問題である。

術に従って計算すると、句８歩、股15歩であるから、弦は$\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17$歩であり、$\dfrac{句\times股\times2}{句+股+弦}=\dfrac{8\times15\times2}{8+15+17}=\dfrac{240}{40}=6$ となる。その導出は注（95）（96）参照。

訳： 今、句８歩、股15歩である。問う、直角三角形に入れることのできる円の直径はどれほどか。

答えにいう、６歩。

術にいう、８歩を句とし、15歩を股とし、これによって弦を求める。３つの数を合わせて法とする。句を股に乗じ、それを２倍して実とする。実を法で割ると円径の歩数が得られる。

[28] 句・股相乘爲圖之本體、朱・青・黃冪各二則倍之爲各四。可用畫於小紙、分裁邪正之會、令顚倒相補、各以類合、成脩冪。圓徑爲廣、幷句・股・弦爲袤。故幷句・股・弦以爲法。又以圖之大體言之、股中青必令立規於橫廣、句・股又邪三徑均、而復連規從(縱)橫量度句股、必合而成小方矣。

又畫中弦、以觀其會、則句・股之中成小句股弦者(四)[一]。句面之小股·股面之小句皆小方之面、皆圓徑之半。其數故可衰、以句·股·弦、爲列衰。副幷爲法。以(小)[二]句乘未幷者、各自爲實。實如法而一、得句面之小股可知也。以股乘列衰爲實、則得股面之小句可知。言雖異矣、及其所以成法之實、則同歸矣。

則圓徑又可以句(乘)[・股・弦]之差・幷。句弦差減股爲圓徑。又弦減句股幷、餘爲圓徑。以句弦差乘股弦差而倍之、開方除之、亦圓徑也。

校訂： [一]戴震が「則句・股之面中央小句股弦」を「則句・股之中成小句股弦者四」に校訂するが、文脈により「四」字は不要であり、これを削る。

［二］李潢に従い、「小」字を削る。

訓読： 句・股は相い乗じて図の本体と為し、朱・青・黄冪は各おの二にして、則ち之を倍すれば各おの四と為す(95)。用って小紙に画き、斜正の会を分裁し、転倒し相補い、各おの類を以て合わせしむれば、成りて冪を修むべし。円径を広と為し、句・股・弦を并せて袤と為す。故に句・股・弦は并せて以て法と為す(96)。

又た図の大体を以て之を言えば、股中の青は必ず横広に規を立たしめ、句・股又た斜の三径均しくして、復た規を縦横に連ね、句・股を量度すれば、必ず合して小方を成す(97)。

又た中弦を画き、以て其の会を観れば、則ち句·股の中に小句股弦なる者を成す(98)。句面の小股・股面の小句は皆な小方の面にして、皆な円径の半(99)。其の数故（もと）より衰すべければ(100)、句・股・弦を以て列衰と為す。副に并せて法と為す。句を以て未だ并せざる者に乗じ、各自を実と為す。実、法の如くして一とすれば、句面の小股を得て知るべき也。股を以て列衰に乗じて実と為せば、則ち股面の小句を得て知るべし。

言異なると雖も、其の法の実を成す所以に及べば、則ち同帰す。

則ち円径は又た句・股・弦の差・并を以てすべし。句・弦の差を股より減じて円径と為す(101)。又た弦は句股の并より減じ、余は円径と為す(102)。句弦の差を以て股弦の差に乗じて之を倍し、開方して之を除けば、亦た円径なり(103)。

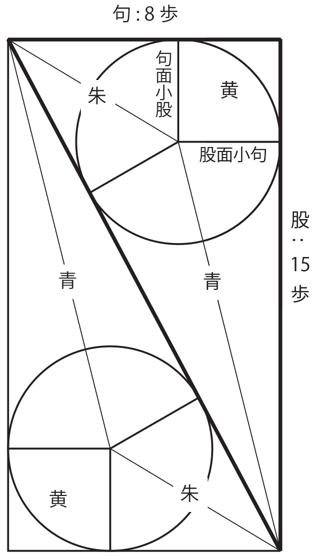


図16①

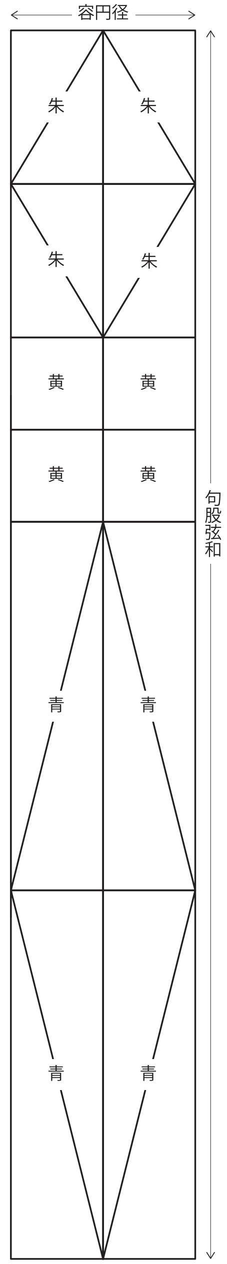


図16②

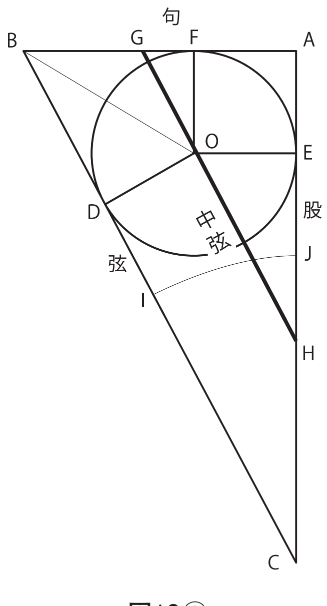


図16③

注：(95) 題意の直角三角形を、各辺に垂直な内接円の半径で分割すると、朱・青・黄の３つの四角形になる。図16①参照。句・股を２辺とする長方形を本体とすると、題意の直角三角形２つ分であるから、本体２つではそれぞれ４つ分ずつになるということ。

(96) 朱・青・黄の四角形をさらに分割し組み換えると、本体２つ分から大きい長方形ができる。図16②参照。この長方形の短辺が内接円の直径、長辺が句・股・弦の和であるから、大長方形の面積を句・股・弦の和で割れば内接円の直径が求められる。これが本文の解法である。

(97)「規」はコンパス、ぶんまわし、ここでは半径の意。19) 注 (95) 参照。青冪の股上の辺に内接円の半径を立てるのであるが、句・股・弦からの距離が等しくなるように立てるということ。「小方」は小さい正方形。句･股上に立てられた規が連なって、小正方形 (黄冪) ができるということ。

(98)「又た中弦を画き」以降の、注[28]の後半の文においては、相似を用いた解法を説明する。本題の解法と大きく異なり、今有術の用語を用いて説明している点などを考えると、李注の可能性が疑われる。

「中弦」は内接円の中心を通る、斜辺に平行な直線。図16③参照。「其の会」とは中弦GHと句AB･股ACとの交点G, Hを指す。黄冪の辺である規と句･股･中弦によって、元の直角三角形ABCに相似な小直角三角形FGOとEOHができる。

(99)「句面の小股」は句上に辺を持つ小直角三角形FGOの股FO、「股面の小句」は股上に辺を持つ小直角三角形EOHの句EOで、どちらも黄冪の一辺、すなわち円の半径である。

(100) 小直角三角形と元の直角三角形との相似関係から､「句面の小股」が求められる。すなわち、股：句＋股+弦 ＝ 小股：小句+小股+小弦　ここで句面の小直角三角形についてその周長 (小句＋小股＋小弦) が句に等しいことを用いる。これについて28) では次の内容の証明を与えている。

Oは内接円の中心なので $\angle GBO=\angle OBD$ であり、GHとBCが平行なので $\angle OBD=\angle GOB$ である。したがって $\angle GBO=\angle GOB$ であるから $GO=GB$ である。よって 三角形FGOの周長 $FG+GO+OF=FG+GB+FA=AB$ である。

魏晋期の中国でこのような理解がされていたかについては不明。あるいは唐代の李注の理解であろうか。

(101) 股－（弦－句）＝AC－（BC－AB）＝AC－（CD－AF）＝AC－JC＝AJ＝円径である。図16③参照。

(102) 句+股－弦＝AB＋AC－BC＝AB－BF＋AC－CE＝AF＋AE＝円径である。図16③参照。

(103) 算題［一二］の解法である。

訳：句・股を相い乗じたものを図の本体とすると、朱・青・黄冪はそれぞれ２つずつで、それが倍されているので、それぞれ４つずつとなる。小紙に図を描き、斜めや縦横に切り離し、ひっくり返して補って、それぞれの類ごとに合わせ、出来上がったもので面積を考えよ。円径が短辺、句・股・弦の和が長辺である。したがって句・股・弦の和を法とする。

また、図の元の直角三角形でこれを述べると、股の辺上の青冪は横幅の方に半径を立てさせるのに、句・股・斜めの三辺への距離が均しくなるようにして、復た半径を縦横に連ねて、句・股の辺とで量り取れば、必ず合わさったものは小正方形となる。

また斜辺に平行に（内接円の中心を通る）中弦を描き、それと句・股との交点を見ると、句・股の上に小直角三角形ができる。句上の小三角形の股・股上の小三角形の句は、どちらも小正方形の一辺で、円の半径である。相似で辺の比がわかるので、したがって句・股・弦によって比率をとって、列衰とするのである。列衰を別に合わせて法とする。句をまだ合わせていない者に乗じて、それぞれ実とする。（股）実を法で割ると、句上の小股が求められ、円の半径がわかる。股を列衰に乗じて実とすれば、ただちに股上の小句が求められ、円の半径がわかる。言葉は違っているが、その全体の部分に対する比率を考えれば、結論は同じとなるのである。

また、ただちに円径を、句・股・弦の差や和を用いて求めることもできる。句弦差を股から引けば円径である。また、弦を句股和から引いても、残りは円径となる。句弦差を股弦差に掛けて２倍し、これを開平方して除いてもまた、円径である。

参考文献

１）李継閔『《九章算術》校証』（1993年９月）
２）郭書春『匯校九章算術』（2004年８月）
３）郭書春·劉鈍『算経十書』（遼寧教育出版社、1998年12月）、（九章出版社、2001年４月）
４）川原秀城「劉徽註九章算術」（『中国天文学・数学集』所収、1980年11月）
５）白尚恕『《九章算術》注釈』（1983年12月）
６）沈康身『九章算術導読』（1997年２月）
７）李継閔『《九章算術》及其劉徽注研究』（1992年８月）
８）李継閔『《九章算術》導読与訳注』（1998年９月）

９）李籍「九章算術音義」（文淵閣四庫全書本および四部叢刊本『九章算術』所収）
10）「九章算術補註」（李儼『中算史論叢』（三）、1935年12月）
11）楊輝『詳解九章算法』（宜稼堂叢書本）
12）李潢『九章算術細草図説』（嘉慶庚辰（25年）語鴻堂刊本）
13）清水達雄『九章算術』1～15（『数学セミナー』1975年２月号～1976年４月号）
14）張家山漢簡『算数書』研究会編『漢簡『算数書』－中国最古の数学書－』（朋友書店、2006年10月）
15）Shen, Kang-Shen, Crossley, John N., Lun, Anthony W. C.『The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary』（Oxford Univ. Press, 1999年10月）
16）大川俊隆『九章算術』訳注稿（1）大阪産業大学論集　人文･社会科学編２号（2008年２月）
17）大川俊隆『九章算術』訳注稿（2）大阪産業大学論集　人文･社会科学編３号（2008年６月）
18）Chemla, Karine; Guo, Shuchun『Les neuf chapîtres, Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires』（Dunod, 2004年第４四半期）
19）大川俊隆『九章算術』訳注稿（3）大阪産業大学論集　人文･社会科学編４号（2008年10月）
20）大川俊隆『九章算術』訳注稿（4）大阪産業大学論集　人文･社会科学編５号（2009年２月）
21）馬場理惠子『九章算術』訳注稿（5）大阪産業大学論集　人文・社会科学編６号（2009年６月）
22）馬場理惠子『九章算術』訳注稿（6）大阪産業大学論集　人文・社会科学編７号（2009年10月）
23）銭宝琮点校『九章算術点校』（北京中華書局刊『算経十書』所収、1963年10月）
24）角谷常子、張替俊夫『九章算術』訳注稿（7）大阪産業大学論集　人文・社会科学編８号（2010年２月）
25）汪莱撰『校正九章算術及戴氏訂訛』（『衡齋遺書』所収）
26）角谷常子、張替俊夫『九章算術』訳注稿（8）大阪産業大学論集　人文・社会科学編９号（2010年６月）
27）田村誠、張替俊夫　新たに出現した二つの古算書―『数』と『算術』大阪産業大学論集　人文・社会科学編９号（2010年６月）
28）郭書春『九章算術訳注』（上海古籍出版社、2009年12月）
29）田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（9）大阪産業大学論集　人文・社会科学編10号（2010年10月）
30）田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（10）大阪産業大学論集　人文・社会科学編11号（2011年２月）

31）田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（11）大阪産業大学論集　人文・社会科学編12号（2011年６月）
32）田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（12）大阪産業大学論集　人文・社会科学編13号（2011年10月）
33）朱漢民、陳松長主編『岳麓書院蔵秦簡（貳）』（上海辞書出版社、2011年12月）
34）小寺裕、武田時昌『九章算術』訳注稿（13）大阪産業大学論集　人文・社会科学編14号（2012年２月）
35）田村誠、武田時昌『九章算術』訳注稿（14）大阪産業大学論集　人文・社会科学編15号（2012年６月）
36）大川俊隆　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（1）大阪産業大学論集　人文・社会科学編16号（2012年10月）
37）田村誠　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（2）大阪産業大学論集　人文・社会科学編17号（2013年２月）
38）馬場理恵子、吉村昌之　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（3）大阪産業大学論集　人文・社会科学編18号（2013年６月）
39）角谷常子　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（4）大阪産業大学論集　人文・社会科学編19号（2013年10月）
40）小寺裕、張替俊夫　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（5）大阪産業大学論集　人文・社会科学編20号（2014年２月）
41）武田時昌　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（6）大阪産業大学論集　人文・社会科学編21号（2014年６月）
42）小寺裕、武田時昌、張替俊夫『九章算術』訳注稿（15）大阪産業大学論集　人文・社会科学編22号（2014年10月）
43）郭書春『九章算術新校』（中国科学技術大学出版社、2013年12月）
44）武田時昌、張替俊夫『九章算術』訳注稿（16）大阪産業大学論集　人文・社会科学編23号（2015年２月）
45）大川俊隆『九章算術』訳注稿（17）大阪産業大学論集　人文・社会科学編23号（2015年２月）
46）呉朝陽『張家山漢簡《算数書》校証及相関研究』（江蘇人民出版社、2014年５月）
47）大川俊隆『九章算術』訳注稿（18）大阪産業大学論集　人文・社会科学編24号（2015年６月）

48）角谷常子『九章算術』訳注稿（19）大阪産業大学論集　人文・社会科学編24号（2015年６月）
49）角谷常子『九章算術』訳注稿（20）大阪産業大学論集　人文・社会科学編25号（2015年10月）
50）馬場理恵子『九章算術』訳注稿（21）大阪産業大学論集　人文・社会科学編25号（2015年10月）
51）馬場理恵子『九章算術』訳注稿（22）大阪産業大学論集　人文・社会科学編26号（2016年２月）
52）吉村昌之『九章算術』訳注稿（23）大阪産業大学論集　人文・社会科学編27号（2016年６月）
53）吉村昌之『九章算術』訳注稿（24）大阪産業大学論集　人文・社会科学編28号（2016年10月）
54）中国古算書研究会編『岳麓書院蔵秦簡『数』訳注－秦漢出土古算書訳注叢書（2）－』（朋友書店、2016年11月）
55）張替俊夫『九章算術』訳注稿（25）大阪産業大学論集　人文・社会科学編29号（2017年３月）
56）張替俊夫『九章算術』訳注稿（26）大阪産業大学論集　人文・社会科学編30号（2017年６月）
57）田村誠『九章算術』訳注稿（27）大阪産業大学論集　人文･社会科学編30号（2017年６月）
58）田村誠『九章算術』訳注稿（28）大阪産業大学論集　人文･社会科学編31号（2017年10月）
59）大川俊隆『九章算術』訳注稿（29）大阪産業大学論集　人文・社会科学編31号（2017年10月）