企業の生産活動とヘッジング戦略に関する理論的考察※

岩　城　秀　樹[†]
尾　﨑　祐　介[††]

概　　要

企業の生産活動には不確実性が伴う。企業は不確実性に対応する様々な手段を有している。本論文の目的は，販売価格の不確実性に直面している企業の生産活動，先物を使ったヘッジング戦略について理論的に考察することである。最初に，不確実性が（単一の）確率分布で表現されるリスクの場合を考えて，古典的な二つの結果を概観する。そして，不確実性が確率分布で表現できない曖昧な状況を考えて, 企業の生産活動とヘッジング戦略に関する研究を説明する。最後に，今後の研究展望を行う。

JEL 分類番号：D8，G3

キーワード：曖昧性，完全ヘッジ定理，先物，不確実性，分離性質，リスク

1．はじめに

我々が直面するほとんどの選択や決定には不確実性が内包している。[1)] そのため，経済学では不確実性に多くの関心が向けられ，不確実性の経済学という分野として認識されている。ここで，不確実性の経済学について類型化してみる。一つ目は不確実性下の意思決定モデルの基礎を与える分野である。その一つの方法として, 公理による特徴付けがある。最近では実験に基づいた特徴付け，また，両者を合わせた特徴付けも行われている。二つ目は，意思決定モデルに基づいた理論分析である。分析は，関数形の特定によって分類で

---

†　京都産業大学 経営学部
††大阪産業大学 経済学部
草 稿 提 出 日　２月５日
最終原稿提出日　４月９日
※本研究に対して大阪産業大学大学間連携組織の研究助成を受けた。記して感謝したい。匿名の査読者から有益なコメントを頂きました。記して，感謝いたします。
１）本稿では，確率で表現できる場合をリスクと表現できない場合をナイトの不確実性，または曖昧性と呼ぶ。不確実性はこの二つを含む一般的な用語として使う。

きる。関数形を特定化することによって，分析の解析解を導出することができる。一方では，分析が関数の特定化に依存している場合もあるので，関数を特定化することなく，一般的な性質を導出することも有用である。この二つの方法は互いに補完的な関係であると言える。三つ目は，理論的な分析結果の実証･実験による検証である。言うまでもないが，これら三つは相互に依存している。本論文では，企業金融論の中でも，不確実性の経済学の側面に着目する。今までの結果について概観し，また，今後の研究を展望することを目的としている。

企業活動には様々な不確実性を伴うことが一般的である。その一つに販売価格の不確実性があり，様々な分析が行われている。[2)]本論文ではこれらの研究を概説する。 また，企業が販売価格の不確実性をヘッジする目的で使う金融派生商品の分析も進められてきた。この論文では，最初に期待効用に基づいた古典的な結果について概観する。その後，不確実性が（一意の）確率分布を使って表現できないナイトの不確実性と呼ばれる状況について考察する。そのような状況を表現できる二つの意思決定モデルを用いた研究結果を説明する。そして，ナイトの不確実性下での今後の研究について概観する。この論文では，この研究における基本的な結果である分離性質と完全ヘッジ定理に絞ることで，議論の見通しをよくする。

本論文の構成は以下である。第二節において，モデルの設定を記述して，期待効用理論に基づいた古典的な結果を概観する。第三節において，曖昧な状況下を記述する意思決定モデルとして，α-maxmin 期待効用と smooth ambiguity model を説明する。第四節において，それらに基づいた分析を説明する。また，第五節で曖昧性が存在する状況での今後の研究を展望する。第六節は結語である。

2．古典的な結果

競争市場で活動する企業を考える。競争市場の仮定は，企業が価格受容者であることを意味している。企業は一種類の商品を生産・販売しており，その価格を p と表記する。商品の生産量は x と表記して，その生産費は二階微分可能な費用関数 $c(x)$ で表される。ただし，費用関数は増加凸関数とする，$c'(x) = dc(x)/dx > 0, c''(x) = d^2c(x)/dx^2 > 0$。

2）当然，その他の分析も色々と行われており，個別に言及することは紙幅の関係で難しい。そのため，包括的なサーベイとして Tirole（2005）を挙げておく。

販売価格にはリスクがあり，そのリスクは有界な台 $\left[\underline{p},\overline{p}\right]$ で定義される分布関数 $F(p)$ で表現される。ただし， $0<\underline{p}<\overline{p}<\infty$。企業は商品を先物価格 b で売却することもでき，先物の購入量を h とする。以上の設定で，価格 p を所与とした場合の企業の利益は，

$$\Pi=p(x-h)+bh-c(x)$$

となる。企業が期待効用に従って意思決定を行うと仮定して，その（ノイマン＝モルゲンシュタイン型）効用関数を u とする。効用関数は増加凹関数とする，$u'>0,u''<0$。企業は期待効用を最大とするように商品の販売量と先物の購入量を決める，

$$\max_{x,h} Eu\left(\tilde{\Pi}\right)=\int_{\underline{p}}^{\overline{p}} u\left(p(x-h)+bh-c(x)\right)dF(p)。$$

最大化の一階条件はそれぞれ以下で与えられる。

$$\frac{\partial Eu\left(\tilde{\Pi}\right)}{\partial x}=\int_{\underline{p}}^{\overline{p}} u'\left(p(x-h)+bh-c(x)\right)\left(p-c'(x)\right)dF(p)=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Eu\left(\tilde{\Pi}\right)}{\partial h}=\int_{\underline{p}}^{\overline{p}} u'\left(p(x-h)+bh-c(x)\right)(b-p)dF(p)=0 \tag{2}$$

二階条件成立していることは容易に確かめられる。以下も同様なので，二階条件に関する議論は捨象する。(1)式と(2)式を足し合わせることで以下を得る。

$$\int_{\underline{p}}^{\overline{p}} u'\left(p(x-h)+bh-c(x)\right)\left(b-c'(x)\right)dF(p)$$

$$=\left(b-c'(x)\right)\int_{\underline{p}}^{\overline{p}} u'\left(p(x-h)+bh-c(x)\right)dF(p)=0$$

これから，最適な生産量が $b=c'(x)$ となることが分かる。つまり，最適生産量は価格のリスク，また，企業のリスク回避度の両方と無関係に決まることが分かる。この結果は，分離性質と呼ばれている。販売量と同じ量の先物を購入することで，価格のリスクを完全にヘッジすることができる。そのため，完全ヘッジと呼ばれる。一階条件を完全ヘッジの水準で評価すると以下を得る。

$$\frac{\partial Eu\left(\tilde{\Pi}\right)}{\partial h}\Big|_{h=x}=\int_{\underline{p}}^{\overline{p}} u'\left(bx-c(x)\right)(b-p)dF(p)=u'\left(bx-c(x)\right)E[b-\tilde{p}] \tag{3}$$

つまり，(3) 式の符号は$E[b-\tilde{p}]$と同じであることが分かる。これから，先物価格が販売

価格の期待値と等しい時に完全ヘッジとなることが分かる。この結果は，完全ヘッジ定理と呼ばれている。また，先物価格が販売価格の期待値よりも大きい（小さい）時，先物の購入量は販売量を上回る（下回る）こともすぐに分かる。二つの結果を再掲する：

分離性質：企業の販売量は価格リスクと企業のリスク選好とは独立に決められる。

完全ヘッジ定理:先物価格が販売価格の期待値と等しい場合,企業は価格リスクを完全ヘッジする。

第四節では，この二つの結果が曖昧な状況下で成立するか考察する。

3．曖昧な状況下での意思決定モデル

期待効用理論のリスクは（唯一の）確率分布によって表現されている。しかし，一般的には不確実な状況は確率分布によって表現できない。Knight（1929）はこの二種類を区別するため，前者をリスク，後者を不確実性と呼んだ。一般用語ではリスクと不確実性の使い分けが不明瞭であることから，この先ではナイトの不確実性を表現する用語として曖昧性を用いることにする。Ellsberg（1961）は曖昧な状況を再現した実験を提案し，その実験での実際の選択が期待効用と反することを確かめた。彼は赤玉と黒玉の合計が100個である以下の二つの壺を考えた。

壺Ⅰ：黒玉，赤玉，それぞれの個数が不明。

壺Ⅱ：黒玉が50個，赤玉が50個。

つまり，壺Ⅰは曖昧な状況，壺Ⅱはリスクの状況をそれぞれ表している。黒玉で賞金を与える場合，赤玉で賞金を与える場合の両方で壺Ⅱが壺Ⅰよりも選択されるならば，期待効用の反例になる。実際に，多くの研究において，そのような選択が観察されている。

曖昧な状況下での選択と矛盾しない多くの選好表現が提案されている。本研究課題では，Ghirardato *et al*.（2004）が提案した α–maxmin 期待効用と Klibanoff *et al*.（2005）が提案した smooth ambiguity model を曖昧な状況下での選好表現として用いる。Gilboa, and Schmeidler（1989）の maxmin 期待効用は，両者の特別な場合に位置付けられる。（潜在的な）確率分布$F_n(n=1,2,\cdots,N)$を持つN種類の確率変数$\tilde{x}_n$を考える。確率変数の集合を$\tilde{X}=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_N\}$とする。また，確率変数$\tilde{x}_n$が真である主観的確率は$q_n$とする。以上の設定で α–maxmin 期待効用 と smooth ambiguity model は以下のように表される。

$$\alpha\min_{\tilde{x}\in\tilde{X}}Eu(\tilde{x})+(1-\alpha)\max_{\tilde{x}\in\tilde{X}}Eu(\tilde{x})$$

$$\sum_{n=1}^{N}q_n\phi\big(Eu(\tilde{x}_n)\big)$$

前者ではαが十分に大きい場合，後者ではϕによって曖昧性に対する選好が特徴付けられ，それが凹関数の場合に曖昧性を回避することを表現し，Ellsbergの状況での選択を説明できる。

簡単な例によって，Ellsbergの状況が描写できることを説明する。壺から黒玉を引いた場合に100円の賞金を得ることができ，その効用を$u(100)=1$と基準化する。赤玉を引いた場合は賞金を得ることができず，その効用を$u(0)=0$と基準化する。主体が壺Ⅱから得る期待効用は0.5になる。曖昧な状況では，主体は黒玉が多い場合，赤玉が多い場合の二つの場合を考えていて，それぞれが真である確率を1/2と考えている。黒玉が多い場合はその個数が75個，赤玉が多い場合はその個数が75個とする。黒玉が多い場合の期待効用は0.75，赤玉が多い場合の期待効用は0.25となる。α-maxmin期待効用では，

$$0.25\alpha+0.75(1-\alpha)\leq 0.5 \Leftrightarrow \alpha\geq 0.5$$

となる。$\alpha\geq 0.5$の時，主体が曖昧な状況を回避していることを描写できる。換言すれば，最悪の期待効用により重心を置いている場合，主体は曖昧な状況を回避していると考えることができる。maxmin期待効用は，$\alpha=1$の場合に対応しているので，曖昧な状況を回避していることを描写できている。一方，smooth ambiguity modelでは，

$$\frac{1}{2}\phi(0.25)+\frac{1}{2}\phi(0.75)\leq\phi(0.5)\Leftrightarrow\phi\text{: concave}$$

となる。ϕが凹関数の時，主体が曖昧な状況を回避していることを描写できる。maxmin期待効用は，$-\phi''/\phi'$が無限大の場合に対応しているので，曖昧な状況を回避していることを描写できている。

4．曖昧な状況下での企業のリスクマネジメント

4－1　α-maxmin期待効用の場合

本節では，Lien（2000）に従って，α-maxmin期待効用に基づいた議論を進める。価格には不確実性が存在し，それが潜在的な確率変数の集合$\tilde{P}:=\{\tilde{p}_1,\tilde{p}_2,\dots,\tilde{p}_n\}$で表されてい

る状況を想定する。それぞれの確率変数は共通の正の有界な台 $\left[\underline{p},\overline{p}\right]$ で定義された分布関数 F_i を持っている。その他の設定は二節と同様である。以上の設定で企業の最適化問題は

$$\max_{x,h}\min_{\tilde{P}}\ \alpha E_g\left[u\left(\tilde{\Pi}\right)\right]+(1-\alpha)E_{\tilde{P}}\left[u\left(\tilde{\Pi}\right)\right]$$

で与えられる。ただし,

$$E_f\left[u\left(\tilde{\Pi}\right)\right]=E_f\left[u\left(\tilde{p}(x-h)+bh-c(x)\right)\right]=\int u\left(\tilde{p}(x-h)+bh-c(x)\right)dF(p)$$

である。 $x-h<0$ の時，確実に最高価格である p_H が実現する場合，期待効用を最小にする。つまり，企業の最適化問題は

$$\max_{x,h}\ \theta E_g\left[u\left(\tilde{\Pi}\right)\right]+(1-\theta)u(\Pi(p_H)) \tag{4}$$

と書き直せる。同様の考え方により， $x-h\geq 0$ の場合，企業の最適化問題は

$$\max_{x,h}\ \theta E_g\left[u\left(\tilde{\Pi}\right)\right]+(1-\theta)u(\Pi(p_L)) \tag{5}$$

となる。(4)式から，一階条件はそれぞれ以下で与えられる。

$$\theta E_g\left[\left(\tilde{p}-c'(x)\right)u'\left(\tilde{\Pi}\right)\right]+(1-\theta)\left(p-c'(x)\right)u'\left(\Pi(p_H)\right)=0$$
$$\theta E_g\left[(b-\tilde{p})u'\left(\tilde{\Pi}\right)\right]+(1-\theta)(b-p)u'\left(\Pi(p_H)\right)=0$$

上式を足し合わせると,

$$\theta\left(b-c'(x)\right)E_g\left[u'\left(\tilde{\Pi}\right)\right]+(1-\theta)\left(b-c'(x)\right)u'\left(\Pi(p_H)\right)=0$$

となる。よって，最適な生産量は $b=c'(x)$ となり，価格の曖昧性や企業の曖昧性選好とは独立に決められることが分かる。これは, 分離性質が成立していることを意味している。 $x-h\geq 0$ の場合も同様である。つまり，α−maxmin 期待効用の場合，分離性質は成立している。

次に，完全ヘッジ定理について確かめてみる。(4)式と (5)式において，完全ヘッジ $h=x$ が端点解で成立している条件は，それぞれ

$$u'\left(bx-c(x)\right)\left[\theta E_g(b-\tilde{p})+(1-\theta)(b-p_H)\right]\geq 0 \tag{6}$$

$$u'\left(bx-c(x)\right)\left[\theta E_g(b-\tilde{p})+(1-\theta)(b-p_L)\right]\geq 0 \tag{7}$$

で与えられる。これらをまとめると，完全ヘッジが成立するのは，先物価格が

$$\theta E_g[\tilde{p}] + (1-\theta)p_L \leq b \leq \theta E_g[\tilde{p}] + (1-\theta)p_H$$

となることが分かる。これは期待効用の場合と異なる結果である。実際，$\theta = 1$ の場合は期待効用になり，この場合では，完全ヘッジが成立するのは $b = E_g[\tilde{p}]$ となる。Lien（2000）で考えている状況は通常の α-maxmin 期待効用ではなく，基準となる期待効用と最悪の期待効用の凸結合で表現されていることに注意すべきである。例えば，通常の α-maxmin 期待効用での分析は今後の残された課題の一つである。また，確定値も取るとして分析をしているが，その設定を緩和するのも残された課題の一つである。

次に，Iwaki and Osaki（2012）に基づいて，同様の設定で smooth ambiguity model を考察する。最初に，価格の不確実性が確率変数 $\tilde{p}_i$ で表されているとすると，その場合の期待効用は

$$E_i[u(\tilde{\Pi})] = \int_{\underline{p}}^{\overline{p}} u\big(p(x-h) + bh - c(x)\big) dF_i(p)$$

となる。価格の不確実性が $\tilde{p}_i$ となる確率が q_i で与えられているとする。この時，smooth ambiguity model に従う企業の目的関数は

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \phi\big(E_i[u(\tilde{\Pi})]\big)$$

となる。企業は曖昧回避，つまり，ϕ を凹関数とする。一階条件は，

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \phi'\big(E_i[u(\tilde{\Pi})]\big) E_i\big[(\tilde{p}_i - c'(x))u'(\tilde{\Pi})\big] = 0 \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \phi'\big(E_i[u(\tilde{\Pi})]\big) E_i\big[(b - \tilde{p}_i)u'(\tilde{\Pi})\big] = 0 \qquad (9)$$

となる。(8)式と（9)式を足し合わせると，

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \phi'\big(E_i[u(\tilde{\Pi})]\big) E_i\big[(b - c'(x))u'(\tilde{\Pi})\big] = 0$$

となる。これより，企業の最適な生産量は $b = c'(x)$ となり，価格の曖昧性や企業の曖昧性に対する態度とは無関係に決まる。よって，smooth ambiguity model では分離性質が成立していると言える。次に，完全ヘッジング定理を確かめるために，$h = x$ で一階条件

の符号を評価する。適当な操作によって，(8)式の符号が，

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \phi'\left(E_i\left[u\left(\tilde{\Pi}\right)\right]\right) E_i[(b-\tilde{p}_i)] E\left[u'\left(\tilde{\Pi}\right)\right]$$

で与えられることが分かる。この符号は，

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \, E_i[(b-\tilde{p}_i)]$$

で与えられる。これより，$\sum_{i=1}^{n} q_i \, E_i[(\tilde{p}_i)] = b$ の時に完全ヘッジとなっていることが分かる。同様の結果は，Wong（2014）などでも言及されている。

5．今後の研究

本論文では，最初に古典的な研究である Holthausen（1979）の結果を概観し，その分析を曖昧性が存在する状況に拡張した最近の結果について説明した。今後の研究は，以下の二つに分けることができる。

1．Holthausen（1979）以降，様々な期待効用を用いた様々な企業のリスクマネジメントを分析した研究がある。今後，これらの分析に曖昧性を加味した研究が進むと予想される。
2．曖昧性を描写できる意思決定モデルは，本論文で挙げた以外でも様々なモデルがある。今後は，これらを用いた企業のリスクマネジメントの分析が進むことが期待される。また，これらのモデルは相互に関連があるので，それらを俯瞰できる系統的な分析が期待される。

6．結語

本論文では，価格の不確実性に直面している企業の生産活動と先物を用いたヘッジング行動について，今までの結果を概観し，今後の研究展望を行った。本論文では，静学的な理論分析に着目したため，包括的な展望にはなっていない。動学分析や実証分析なども盛んに行われ，それらは相互に関連しているので，次の機会ではそれらも踏まえた包括的な分析を行うことを課題としたい。

参考文献

・Ellsberg, D. Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms, Quarterly Journal of Economics 75, 643-669, 1961.

・Ghirardato, P. F. Maccheroni, and M. Marinacci, Differentiating Ambiguity and Ambiguity Attitude, Journal of Economic Theory 118, 133-173, 2004.

・Gilboa, I. and D. Schmeidler, Maxmin Expected Utility with Non-unique Prior, Journal of mathematical economics 18, 141-153, 1989.

・Holthausen, D. M. Hedging and the Competitive Firm under Price Uncertainty, American Economic Review 69, 989-995, 1979.

・Iwaki, H. and Y. Osaki, Production and Hedging Decisions under Smooth Ambiguity Aversion, SSRN Working Paper 2146577, 2012.

・Klibanoff, P. M. Marinacci and S. Mukerji, A Smooth Model of Decision Making under Ambiguity, Econometrica 73, 1849-1892, 2005.

・Knight, F. H. Risk, Uncertainty and Profit, Houghton Mifflin, Boston, 1921.

・Lien, D. Production and Hedging under Knightian Uucertainty Journal of Futures Markets 20, 397-404, 2000.

・Tirole, J. The Theory of Corporate Finance, Princeton University Press, Princeton, 2005.

・Wong, K. P. Ambiguity and the Value of Hedging, Forthcoming in Journal of Futures Markets, 2014.