張家山漢簡『算数書』訳注稿（5）

田　村　三　郎

張家山漢簡『算数書』研究会
大川　俊隆，岡山　茂彦，小寺　裕，角谷　常子
田村　三郎，田村　誠，張替　俊夫，吉村　昌之

Translation and Annotation of "The Book *Suanshu-shu* of Zhangjiashan Banboon Slips of Han Dynasty" ,Vol.5

Saburo　TAMURA

Abstract

The unearthed book "Shanshu-shu（算数書）" is the oldest book of mathematics in China. In order to report this book's proper collation, translation, and annotation, the very first procedure was to decipher the letters from photographs with the following investigation of the results with the mathematical and historical viewpoints.
This is the fifth released article based on our research and results in which we studied 10 sections named "Silian (糸練)", "Chongsu (舂粟)", "Tongmao (銅秏)", "Futan (負炭)", "Lutang(簏簜)", "Yushi(羽矢)", "Fumi(負米)", "Fenqian(分銭)", "Michuqian (米出銭)", and "Fangtian (方田)".

今回，本訳注稿において発表するものは『九章算術』の均輸章の算題と直接関連付けられる「糸練」「舂粟」「銅秏」「負炭」「簏簜」「羽矢」「負米」の算題と，『九章算術』の盈不足章の算題と直接関連付けられる「分銭」「米出銭」「方田」である。

平成16年６月29日　原稿受理
元大阪産業大学　教養部教授

九章算術	術名または番号	算数書
六．均輸章	(10) 術	32．糸練
	(11) 術	18．舂粟
	(11) 術	19．銅秏
	(20) — (26) 術	48．負炭
	(20) — (26) 術	49．盧唐
	(20) — (26) 術	50．羽矢
	(27) 術 ,(28) 術	14．負米
七．盈不足章	(1) — (8) 術	52．分錢
	(9) — (19) 術	53．米出錢
	(11) 術	68．方田

32 糸練

［釈文］

絲練。以級＜絡＞[1]絲求練。因而十二之、除十六而得一[2]。 78

［訓読］

糸練。絡糸を以て練を求む。因て之を十二して，除すること十六にして一を得。

［和訳］

糸練。絡糸から練糸を求めるには，絡糸を12倍して16で割ればよい。

［注］

1）『九章算術』の「均輸章」の第10題に「今有絡糸一斤為練糸一十二両」とあり，「級」は「絡」の誤りであるが，この『算数書』と同時出土の『二年律令』142簡には「留畏哭弗敢就，奪其将爵一絡免之」とあり，「級」の代わりに「絡」が用いられた例がある。したがって，「級」と「絡」とは字形の類似により互用されていた可能性もある。

2）上記注1）の『九章算術』の文によれば，絡1斤（16両）が練12両にあたるので，絡の12倍を16で割ったものが練となる。

18 舂粟

［釈文］

舂粟。稟粟一石、舂之爲八斗八升。當益秏(耗)粟幾何[1]。曰、二斗二升十一分升八[2]。朮(術)曰、直（置）所得米升數以爲法。有（又）直（置）一石 48

米粟升數而以秏（耗）米升數乘之。如法得一升[3)]。　49

［訓読］

舂粟。粟一石を稟けて，之を舂けば八斗八升と為す。当に益すべき耗粟は幾何ぞ。曰く，二斗二升十一分升の八。術に曰く，得る所の米の升数を置きて以て法と為す。又，米一石の粟の升数を置きて耗米の升数をもって之に乗ず。法の如くして一升を得。

［和訳］

舂粟。粟重さ１石を受領したが，これを舂くと８斗８升にしかならなかった。（丁度米１石を得るために受領した粟重さ１石に）益すべき耗粟は幾らだろうか。曰く，$22\frac{8}{11}$升である。術に曰く，舂いて得られた米の升数（所得米88升）を法とする。米１石の粟の升数（$\frac{500}{3}$升）に耗米の升数（12升）を掛ける。これを法で割る。

［注］

1）『算数書』の「程禾」には「禾黍一石為粟十六斗大半斗。舂之為糲米一石。」とある。「禾黍」と「粟」，「糲米」と「米」を同じと見做すと，「程禾」にあるように，重さ一石の粟を舂くと米１石（100升）となることは当時常識であったのであろう。問題文にあるように，受領した粟１石が粗悪な粟であったため舂くと88升にしかならなかった。これは秏したためであって，「程禾」にあるように正しく米（糲米）100升を得たい。そのためには「稟けた粟に耗した粟をいくら益すべきであろうか」というのが問題である。したがって，「当益耗粟幾何」の前に言外の「欲得米一石」に相当する文があると考えて，「（丁度米１石を得るために受領した粟に対して）益すべき耗粟は幾らか」と読むことにする。当時，重さ１石の粟から，米１石が得られることは当時の常識であったのだろうから，「欲得米一石」がなくとも上のように理解することは可能である。

鄒大海［19］は，問題文を上のように読み，求める耗粟をxとして次のような比例関係の表を頭においていたものと考えられる。（単位は升である。）

	粗粟	粟	耗粟	耗米	米
稟	$\frac{500}{3}$	$\frac{440}{3}$	20	12	88
問	$\frac{500}{3}+x$	$\frac{500}{3}$	x	$\frac{3x}{5}$	100

この表をもとに立式すると

$$20 : x = 88 : 100 \qquad \therefore \quad x = \frac{100 \times 20}{80} = \frac{250}{11}$$

となる。(これは鄒大海［19］による立式である。)

2）上の1）で求めた答えxは$22\frac{8}{11}$であった。すなわち鄒大海［19］のように，答えを「二斗二升十一分升八」と読むのが正しい。文献［7］などの釈文では「二斗三＜五＞升十一分升八＜七＞」と読んでいる。しかし，我々研究班の数名が竹簡を直接調査観察したところによると，「三」または「五」の所は確かに「二」と読めるし，「八」または「七」とある所も確かに「八」である。

3）鄒大海［19］は上の1）のように立式したために，術文を「直所得米升数以為法、又值一石米升数而以耗粟升数乗之、如法得一升。」と変更せざるを得なかった。しかしながら，立式を次のようにすれば，術文も変えることなくそのままで解釈することができる。

求める耗粟をxとすると，次の表が作られる。

	粗粟	粟	米
稟	$\frac{500}{3}$	$\frac{440}{3}$	88
耗	x	20	12
問	$\frac{500}{3}+x$	$\frac{500}{3}$	100

この表をもとに立式すると

$$\frac{500}{3} : x = 88 : 12 \qquad \therefore x = \frac{\frac{500}{3} \times 12}{88} = \frac{250}{11}$$

となる。この答えは$22\frac{8}{11}$であって，上の鄒大海［19］の答えと一致している。ところで，術文によると，求める耗粟の升数を

（一石米粟升数）×（耗米升数）÷（所得米升数）

として求めている。これは

「一石米粟升数」$=\frac{500}{3}$，「耗米升数」$=12$，「所得米升数」$=88$

とした我々の立式による計算と一致している。

鄒大海［19］以外の諸論文（［4］［9］［11］［12］）では問題に条件文を追加したり，答えを大幅に変更したりしている。原文のままに読むことにより，問題，答え，術文に一貫した解釈をしている我々の解釈には遠く及ばないと思われる。

19 銅耗

［釈文］

銅秏（耗）。鑄銅一石秏（耗）七斤八兩。今有銅一斤八兩八朱（銖）。問秏（耗）幾何。得曰、一兩十一朱（銖）百册（四十）四分朱（銖）九十一＜一兩十二朱（銖）半＞。朮（術）曰、

直（置）一石朱（銖）數[1]爲法。亦直（置）七斤八両者、 50

朱（銖）數、以一斤八両八朱（銖）者朱（銖）數乘之。如法一朱（銖）[2]。 51

［訓読］

銅耗。銅一石を鋳するに七斤八両を耗す。今，銅一斤八両八銖有り。問う。耗するは幾何ぞ。得て曰く，一両十二銖半。術に曰く，一石の銖数を置きて法と為す。亦，七斤八両たる者の銖数を置き，一斤八両八銖たる者の銖数を以て之に乗ず。法の如くして一銖とす。

［和訳］

銅耗。銅１石を鋳造すると７斤８両消耗する。今，1斤８両８銖の銅がある。これを鋳造すると幾ら消耗するか。曰く，１両12銖半である。術に曰く，１石の銖数(46080)を法とする。また７斤８両の銖数（2880）に，１斤８両８銖の銖数（584）を掛けて，法で割ればよい。

［注］

1）１石は120斤，１斤は16両，１両は24銖であるから，1石は46080銖である。

2）問題文の数値と術文の方法で計算すると

　　2880×584÷46080＝１両12銖半

となり，答の１両11銖144分銖の91と合わない。１石，７斤８両，１斤８両８銖の数値は問題文と術文とに二度現れているので疑えない。したがって，単純な計算ミスであろうが，ミスの原因を推測することはできなかった。

48 負炭

［釈文］

負炭。負炭山中、日爲成炭七斗到車。次一日而負炭道[1]車□[2]、到官一石。今欲道官往之、

負炭［山］[3]中、負炭遠到官。 126

問、日到炭幾何。曰、日得炭四斗十一＜七＞分升＜斗＞二[4]。朮（術）曰、取七斗者十之、

得七石。七日亦負到官、即取十日與七日并 127

爲法、如法得一斗。 128

［訓読］

負炭。 炭を山中に負い，日ごとに炭七斗を成して車に到すと為す。次の一日にして炭を負い車□に道りて，官に一石を到す。今，官道り之に往き，炭を［山］中に負い，負炭を遠く官に到さんと欲す。問う，日ごとに炭を到すこと幾何ぞ。曰く，日ごとに炭四斗十七分斗の二を得。術に曰く，七斗たる者を取りて之を十し，七石を得。七日も亦負いて官に到れば，即ち十日と七日とを取り并せて法と為す。法の如くして一斗を得。

［和訳］

負炭。炭を山中に負って，毎日７斗ずつを車の所まで運ぶ。そこから毎日1石づつ車□によりて役所まで運ぶ。役所から山まで行き，炭を山中に背負って，その炭を（車で）役所まで運ぼうとしている。問う，毎日運べる炭の量はいくらか。曰く，毎日４斗と17分の２斗の炭。術に曰く，７斗を10倍すると７石となる。(これは10日間で山から車まで運べる量である。)また７石は７日で役所まで運べるので，10日と７日を合わせたもの（17日）を法とする。７石（70斗）を17で割れば，一日に運べる炭の斗量が得られる。

［注］

1）「道」は「由」・「従」の意である。『二年律令』182に「越邑・里・官・市院垣，若故壊決道出入及盗啓門戸，皆贖黥」とある。この「道」は「よりて」と読まれるべきで，ここと同じである。

2）「車」の後の一字不明。

3）「炭」と「中」の間に「山」を入れると文意にかなう。

4）術文通りに計算すると

$$\frac{70}{17}=4\frac{2}{17}$$

となるので，「四斗十一分升之二」を「四斗十七分斗之二」の誤写と考えた。

49 簠篡

［釈文］

盧（簠）唐（篡）[1]。程[2]曰、一日伐竹六十箇[3]、一日爲盧（簠）唐（篡）十五└。一竹爲
三盧（簠）唐（篡）。欲令一人自伐竹因爲盧（簠）唐（篡）、一日爲幾何。曰、爲十三 129
盧（簠）唐（篡）四分之三。朮（術）曰、以六十爲法、以五十五乘十五爲實[4]。 130

［訓読］

簄篣。程曰く，「一日に竹六十箇を伐り，一日に簄篣十五を為る。」一竹にして三簄篣を為る。一人をして自ら竹を伐り，因りて簄篣を為らしめんと欲す。一日にして為るは幾何ぞ。曰く，十三簄篣四分之三を為る。術に曰く，六十を以て法と為し，五十五を以て十五に乗じ実と為す。

［和訳］

簄篣。規程にいう。「1日に竹60本を伐り，1日に簄篣15個を作る。」1本の竹から簄篣3個が作られる。1人で自ら竹を伐り，簄篣を作ろうとする。1日で簄篣が幾つ作られるか。答は13簄篣4分の3個である。術によると60を法とし，55に15を乗じたものを実とすればよい。

［注］

1）「盧唐」とは，簄篣で，竹籠のことである。

2）「程」は文献［14］の「程禾」の注にあるように法令の一種で，ここでは労役のノルマの意味として使われている。

3）『説文解字』には箇は「竹枝也」とある。字は「个」にも作る。

4）問題文と術文や答との間に矛盾がある。その矛盾解決策として四つの案を考える。

ア）第一案は問題文はそのままにして「負炭」や「羽矢」などと同じような解法をする。すなわち，簄篣3個を1組と考えることにして，1日に竹60本を伐り，簄篣を5組作る仕事量とすれば，1日に$\dfrac{1}{\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{5}}=\dfrac{60\times5}{60+5}$組，つまり$\dfrac{60\times5\times3}{60+5}$個の簄篣を作ることになる。この解法の通りだとすれば，術文を「六十五を以て法と為し，六十を以て十五に乗じ実となす」とし，答を「十三簄篣十三分之十一」と変更せざるを得ない。しかし，この変更はあまりにも大きすぎる。

イ）第二案として問題文を「一日に竹五十五箇を伐り」とすると，術文と答は変更しないですむ。「六十」を「五十五」に変えるだけで，変更は小さくてすむけれども，問題を変えてしまうのはいかがなものだろうか。

ウ）第三案として文献［12］のように，もともと「竹六十本を伐る」問題と「竹五十五本を伐る」問題の二種類あって，書写する際に中間の文章が脱落してしまった（あるいは129簡と130簡との間にもう一本の簡があって，それが紛失してしまった）のではないかと考えるのである。しかしながら，問題文は勝手に作られた問題ではなく，いやしくも規程であるから，二種類の問題が提出されているとするのは無理がある。

エ）第四案として問題文と答えおよび術文はそのままにして問題文の解釈を適宜変更する案を提出する。つまり，一日に伐る竹は整数本でなければならないと考え，まず初日には5本の竹を伐ることにする。その時間は5/60日分で，残り55/60日分の時間を籚篘を作る時間に当てる。1日15個の籚篘が作れるのだから，55/60日ならこれを15倍して$\frac{55 \times 15}{60} = 13\frac{3}{4}$の籚篘が作られる。この解釈なら答えも術文も変更する必要はない。しかしながら，この問題文の解釈は勿論正しくない。この解法なら毎日竹が少しずつ残る。12日たつと，籚篘は165個作られ，竹は5本余る。したがって13日目は竹を伐らないで籚篘15個を作るのに専念すればよい。だから，13日で180個の籚篘を作ることになり，伐られた竹に残りはない。正解はア）で述べたように籚篘13個13分の11となる。また，問題文には記されていないのに，なぜ初日に5本伐るとするのか。5本以上60本以下なら何本でもよいはずである。初日に60本伐ったとし，後の12日間籚篘作りに専念すれば，結局13日で180個の籚篘が作られることになり，最も簡明な正解に到達する。

　しかし，残念ながらどの案も十分に満足できるものではない。

50 羽矢

［釈文］

羽矢。 程、一人一日爲矢卅(三十)、羽矢廿(二十)ㇾ。今欲令一人爲矢且羽之、一日爲幾何。
曰、爲十二。朮（術）曰、并矢、羽以爲法、以矢、羽相乘爲實[1)]。 131

［訓読］

羽矢。 程に，「一人，一日に矢三十を為(つく)り，矢二十に羽す。」今，一人をして矢を為り且つ之に羽せしめんと欲す。一日に為ること幾何ぞ。曰く，十二を為る。術に曰く，矢，羽を并せて以て法と為し，矢，羽相い乗ずるを以て実と為す。

［和訳］

羽矢。程によると，「1人，1日に矢を30本作り，20本の矢に矢羽をつける。」今，1人で矢を作りしかも矢に矢羽をつけることとした。1日に何本の矢羽をつけた矢ができるか。答は12本である。術に曰く，矢の30本と矢羽をつける20本を足したものを法とし，矢の30と矢羽の20を掛けたものを実とする。

［注］

1）ここでの計算は$\frac{1}{\frac{1}{30}+\frac{1}{20}} = \frac{30 \times 20}{20+30} = 12$である。

14 負米

［釈文］

負米。人負米不智（知）其數以出關。＝（關）三、［＝（三）］[1] 税之一。巳（已）出、餘米一斗。問、始行齎米幾何。得曰、齎米三斗三升四分三。術曰、 38

直（置）一關［餘不税者］[2] 而參（三）倍爲法。有（又）直（置）米一斗而三之[3]、有（又）三（倍）[4] 之而關數焉爲實。 39

［訓読］

負米。人，米を負うも其数を知らずして以て関を出づ。関は三，三にして之に一を税す。已に出だせば，余米は一斗なり。問う，始め行くに齎つ米は幾何ぞ。得て曰く，齎つ米は三斗三升四分の三。術に曰く，一関の余の税せざる者を置きて，三たび倍して法と為す。又米一斗を置きて之を三し，またこれを三して焉を関の数して，実と為す。

［和訳］

負米。ある人が，その数は幾らか解らないが，米を背負って関所を出た。3つの関所があって，各関所ごとの税率は$\frac{1}{3}$である。税金を納めた後，残りの米は1斗であった。最初米を幾ら持って出たか。答は3斗3$\frac{3}{4}$升である。術によると，各関所ごとに税を除いた余り部分の2を3度掛けて法とする。又米1斗を置いてこれを3倍し，もう一度3倍してさらに関所の数だけこれを繰り返して実とする。

［注］

1）「三」の後に重文符号「＝」を脱しているのだろう。

2）この算題は『九章算術』の「均輸章」第27題，第28題と同じ種類の問題である。そこには「不課税の率（余不税者）を掛けて法とする，また課税対象の率（所税者）を掛けて実とする」とある。このことから，術文中の「置一関」の後に「余不税者」を補なった。（彭浩注による。）

3）最後の関所を出るときの余米は1斗だから，その関所に入るときは米$\frac{3}{2}$斗持っていた

はずである。だから二番目の関所に入るときはその$\frac{3}{2}$倍の米を持っていたし，さらに最初の関所に入る前はその$\frac{3}{2}$倍持っていたはずである。したがって，分子（所税者３）を３度掛けた27が実で，分母（余不税者２）を３度かけた８が法である。だから，$\frac{27}{8}$斗＝３斗3$\frac{3}{4}$升となる。

4）「有（又）三倍之」の「三倍之」を，「三之」と同様に「３を掛ける」意味に解釈するのには問題がある。『算数書』では「３を掛ける」意味の場合には「三之」を用い，「三倍之」を用いていない。したがって，この「倍」を衍字と考えることにした。

52 分銭[1)]

［釈文］

分錢。分錢人二而多三、人三而少二。問、幾何人、錢幾何。得曰、五人、錢十三。贏(盈)、不足互乘母［并以］[2)]爲實、子[3)]相從爲法[4)]。皆贏（盈）若 133
不足、子互乘母而各異直（置）之。以子少者除子多者、餘爲法、以不足爲實[5)]。 134

［訓読］

分銭。銭を分けるに人ごとに二（銭）にして多きこと三（銭），人ごとに三（銭）にして少なきこと二（銭）。問う，幾何の人か。銭は幾何ぞ。得て曰く，五人，銭は十三（銭）。盈，不足は互に母に乗じて（并せてもって）実と為し，子相従(くわ)うるを法と為す。みな盈若しくは不足は，子互に母に乗じて各々之を異置す。子の少なき者を以て子の多き者より除き，余りは法と為し，不足を以て実と為す。

［和訳］

分銭。銭を分けるのに，１人２銭とすると３銭余る。一人３銭とすると２銭不足する。問う，人数は何人で，銭は何銭か。答は，人数は５人で銭は13銭である。一方が盈で他方が不足の場合は，盈不足のそれぞれ（子）を互に他方の分配銭数（母）に乗じそれらを合わせて実となし，子を加えて法とする。両方とも盈もしくは両方とも不足の場合は，子を互に他方の母に乗じてそれぞれ別に置く。子の大きい方から小さい方を引いた残りを法とし，別に置いた大きい方から小さい方を引いた残りを実とする。

［注］

1）この「分銭」は『九章算術』での盈不足章の第１題から第２題に相当し，「共に物を買う」

の形で出題されている。『孫子算経』や和算の『塵劫記』などでは盗人算となっている問題である。

2）彭浩［9］の注に従って「幷以」（併せてもって）を補った。

3）これは分数でもないのに，数値を上下に配置し，上を子と呼び下を母と呼んだのであろう。おそらく盈不足数が分配銭数より小さいため，盈不足数を子として分配銭数の上に置いたのであろう。『九章算術』の「盈不足章」の第4題の「計算法」では「おのおのが出した率を置き，その下に余り数，不足数を置く」としているため，母子という名称を使用せず，文章に出てくる数値を上から順に配列して，上下の置き方が『算数書』と逆になっている。『九章算術』では続いて「余り数，不足数をたがいにおのおのが出した率を掛け，加え合わし「実」とする。」とある。「劉徽注」では分数の加法の「斉同術」に相当すると述べてあって，後世「維乗の和」といわれているものである。

4）銭 x 銭を y 人で分ける問題である。まず，一方が盈で他方が不足の時を取り扱う。1人 a 銭ずつ分けると r 銭余り，1人 b 銭ずつ分けると s 銭不足する。式は

$$x=ay+r \qquad x=by-s$$

現代的な計算法では，両式からまず x を消去して

$$(b-a)y=r+s,\ \ y=\frac{r+s}{b-a}$$

とする。他方，y を消去して

$$(b-a)x=br+as,\ \ x=\frac{as+br}{b-a}$$

とする所である。『算数書』では維乗の和 $as+br$ を実とし，盈と不足の和 $r+s$ を法としているが，そこから一気に答として x に実を y に法を対応させているかに見える。

上	子	$-s$	r
下	母	b	a

a 銭ずつ分けると銭が残り，もう1銭増やすと銭が不足するぎりぎりの所を考えると $b=a+1$ となるので，『算数書』の解のように $x=as+br$，$y=r+s$ として求められたのである。『九章算術』にはこのような特別な場合の解法（「盈不足章」第4題「術日」）のほか，別解として $y=\frac{r+s}{b-a}$ として求める一般的な解法（「盈不足章」第4題「其一術日」）も述べている。

5）ともに盈もしくはともに不足の場合は

$$x=ay\pm r,\ \ x=by\pm s \quad (a<b,\ 複合同順)$$

となるが，yを消して$x=\dfrac{|as-br|}{b-a}$，xを消して$y=\dfrac{|r-s|}{b-a}$として求められる。『算数書』での「子を互いに他方の母に乗じてそれぞれ別に置く」はasおよびbrを求めている箇所である。(『九章算術』をみると，ここで「多い方から少ない方を引き，余りを実とする」(「盈不足章」第6題「術曰」) という文章があるので｜$as-br$｜を実としている。)

『算数書』での「子の大きい方から小さい方を引き，余りを法とする」は｜$r-s$｜を意味している。最後の「不足をもって実となす」は法の前に実が置かれるのが普通であろうから，『九章算術』と同じく，上の「それぞれ別に置く」に続いて書かれるべきもので『九章算術』にあるような文章が脱けていたと考えられる。つまり「不足をもって実となす」は｜$as-br$｜を実とすることを意味している。この解法も直ちにxを実にyを法に対応させているかにみえるのは問題がある。正しくは実及び法を$b-a$で約分したものをxやyに対応させなくてはならない。

この「分銭」での計算法を「盈不足の術」というのである。「盈不足の術」は二つのケースに分けられる。一つは盈と不足の両方がある場合で，維乗したものの和を実とし，盈と不足の和を法とする計算法である。もう一つは，ともに盈かともに不足の場合で，維乗したものの差を実とし，盈と不足の差を法とする計算法である。

53 米出錢

［釈文］

米出錢。糲<粺>[1)]米二斗三錢、糲(糲)三斗二錢。今有糲(糲)・粺十斗、賣得十三錢。問、
糲(糲)、粺各幾何。日：粺七斗五分三[2)]、 135
糲（糲）二斗五分二。朮（術）曰、令偕（皆）糲<粺[1)]>也、錢贏（盈）二[3)]。令偕（皆）粺<糲(糲)>[1)]也、錢不足六少半。同贏(盈)・不足以爲法、以贏(盈)乘十斗爲粺<糲(糲)>[1)]、
以不 136
足乘十斗爲糲<粺>[1)]、皆如法一斗[4)]。 137
米斗一銭三分錢二、黍斗一錢半錢。今以十六錢買米・黍凡十斗。問各幾何、用錢亦各幾何。
138
得曰、米六斗、黍四斗、米錢十、黍六。朮（術）曰、以贏（盈）・不足、令皆爲米、多三分
錢二。皆爲黍、少［一］錢。下有三分、 139
以一爲三。命日各而［多二］[5)]少三、幷多而少爲法、更異直（置）二∟・三、以十斗各乘之、
即貿其得［爲實］[6)]、如法一斗[7)]。 140

［訓読］

米出銭。粺米は二斗，三銭，糲米は三斗，二銭。今，糲，粺十斗あり，売れば十三銭を得。問う，糲，粺は各々幾何ぞ。曰く，粺は七斗五分の三，糲は二斗五分の二。術に曰く，皆粺たらしむるに，銭盈(あま)ること二銭。皆糲たらしむれば，銭不足すること六少半。盈・不足を同(あわ)せて以って法となし，盈を以って十斗に乗じて糲と為し，不足を以って十斗に乗じ粺と為す，皆法の如くして一斗。

米は斗ごとに一銭三分銭の二，黍は斗ごとに一銭半銭。今，十六銭を以って米，黍凡そ十斗を買う。問う，各々幾何ぞ，銭を用いること亦各々幾何ぞ。得て曰く，米は六斗，黍は四斗，米は銭十，黍は銭六。術に曰く，盈・不足を以って，皆米と為さしむれば，多きこと三分銭の二。皆黍と為さしむれば，少なきこと一銭。下に三分あれば，一を以って三となし，命じて曰く，各々にして多は二，少は三，多および少を并わせて法と為し，さらに異(べつ)に二・三を置き，十斗を以って各々之に乗じ，即ちその得るを貿(か)え（実と為し），法の如くして一斗。

［和訳］

米出銭。粺米は2斗が3銭，糲米は3斗が2銭である。今，糲粺合わせて10斗あり，売れば13銭を得る。問う，糲，粺は各々幾らか。答は，粺が$7\frac{3}{5}$斗で，糲が$2\frac{2}{5}$斗である。術に曰く，10斗が皆粺だと考えると，銭が2銭盈る。また，10斗全部が糲だと考えれば，銭が$6\frac{1}{3}$銭不足する。盈・不足の数値を合わせて法とし，盈2銭を10斗に乗じて糲とし，不足の$6\frac{1}{3}$銭を10斗に乗じて粺とする。それぞれを法で割る。

米は1斗ごとに$1\frac{2}{3}$銭，黍は1斗ごとに$1\frac{1}{2}$銭である。今，16銭で米と黍合わせて10斗を買う。問う，米と黍の量と銭はそれぞれ幾らか。答は米は6斗，黍は4斗で，米は10銭，黍は6銭である。術に曰く，盈不足を考えて，10斗が皆米とすれば，$\frac{2}{3}$銭余る。10斗が皆黍とすれば，1銭不足する。分数の分母に3があるから，3倍する。命に曰く，それぞれ盈2，不足3とし，盈・不足を合わせたものを法とする。さらに別々に盈2，不足3を置いてそれぞれ10倍して，その答の盈と不足の数値を交換して，（30銭を米の実とし，20銭を黍の実とし，）それぞれの実を法で割る。

［注］

1）「粺」とすべき所が「糲」と誤記されている。逆に「糲」とすべき所を「粺」と誤っている。これは術において盈・不足に対応する粺と糲を最後に交換する必要があることと関連しているかもしれない。

2）本来なら「五分斗之三」とすべきであろうが，「五分三」という略記法もあったのであ

ろう。抽象的分数表記の現れともいえる。

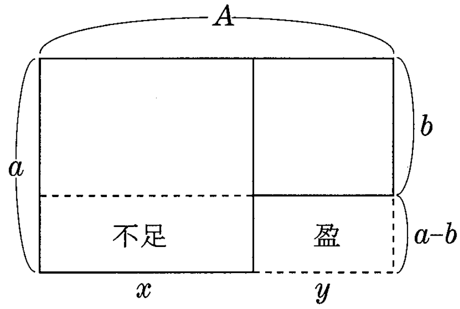
3）「二銭」の「銭」は略しても意味は通じる。以下同様。

4）売値は粺米が1斗につき a 銭，糲米は1斗につき b 銭とし（$a>b$ と仮定），粺米が x 斗，糲米は y 斗で，合わせて A 斗あるとする。これらを売ると B 銭になる。方程式は

$x + y = A$・・・・・・①

$ax + by = B$・・・・・②

「皆粺だとすると二銭盈る」のところは①を a 倍して②を引いて $aA - B$ を求めていることに相当する。この部分こそ鶴亀算での算術的解法を表している。また「皆糲だとすると六銭と三分の一銭不足する」の所は②から①を b 倍したものを引いて $B - bA$ を求めるのである。鶴亀算では盈と不足をそれぞれ $a - b$ で割って y と x を求める所であるが，『算数書』ではそのようにはしていない。『九章算術』の「盈不足章」の第16題がこの種の問題で，鶴亀算と同じように盈不足を求めているが，そこでの例は $a - b$ が1の場合であるので，『算数書』と同じ解法かどうかの判定はできない。同じく川原秀城訳『九章算術』の「盈不足章」の第9題での川原訳注には，この種の問題を「盈不足の術」を使って解く解法の説明がある。その説明を参考にしながら，「方田」での解説にも利用するため更に一般化して述べておこう。



x が正の範囲で単調に増加する関数 $F(x)$ がある。方程式 $F(x) = K$ の解を求めることにしよう。解より大きい近似値を a とすると $F(a) - K$ 余る。次に解より小さい近似値を b とすると $K-F(b)$ 不足する。ここで「盈不足の術」により維乗したものの和 $b(F(a)-K)+a(K-F(b))$ を実とし，盈と不足の和 $F(a)-K+K-F(b)=F(a)-F(b)$ を法とする。実を法で割った商を c とすると，c は a と b の間にあって，より近い近似値となっている。つまり c は a と b の不足対盈の加重平均（内分比）となっているからである。（共に盈もしくは共に不足となる場合は，外分比を求めることに相当していることを注意しておこう。）特に，ここの場合のように $F(x)$ が一次関数となっているときには c は正しい解となっている。

しかしながら『算数書』の解法はこれとも異なるものである。そこで『算数書』の解を考察しておこう。「分銭」での盈不足の解法のように「盈不足の数値を合わせて以って法となし」ている。この所は，$aA-B+B-bA=(a-b)A$ を求めているわけである。

また「盈に十斗を乗じて糲とする」のは$(aA-B)A$とし糲の実を求めている所であるし，「不足を十斗に乗じて粺とする」のは$(B-bA)A$を粺の実としている所である。この計算法はAを盈と不足の比に比例配分しているわけである。

5）「多二」の脱字があると考えられる。

6）「爲實」の脱字があると考えられる。

7）後半の米と黍の問題は上の粺と糲の問題と同じように解いている。皆米と考えると$aA-B=\frac{2}{3}$余るし，皆黍と考えると$B-bA=1$不足する。分母に3があるから，全体を3倍して盈2，不足3となるし，盈・不足の和5を法とする。盈・不足をそれぞれ$A=10$倍し，盈と不足の数値を交換し，それぞれ法で割って，米6斗，黍4斗を得る。

$\boxed{68}$ 方田

［釈文］

方田。田一畝方幾何步└。曰、方十五步卅（三十）一分步十五。朮（術）曰、方十五步不足
十五步、方十六步有徐（餘）十六步。曰、并贏（盈）、不足以爲法└。不足 185
子乘贏（盈）母、贏（盈）子乘不足母、并以爲實[1)]。復之、如啓廣之朮（術）[2)]。 186

［訓読］

方田。田一畝，方は幾何歩ぞ。曰く，方，十五歩三十一分歩の十五。術に曰く，方，十五歩なれば十五歩足らず，方，十六歩なれば十六歩余す有り。曰く，盈・不足を并わせて以って法となす。不足の子を盈の母に乗じ，盈の子を不足の母に乗じ，并わせて以って実となす。之を復するに，啓広の術の如くす。

［和訳］

方田。田一畝がある。それを正方形の田にした場合，一辺の長さは幾らか。答は一辺の長さが$15\frac{15}{31}$歩である。術によると，一辺15歩とすると，15歩不足する。また一辺を16歩とすると16歩余る。盈と不足を合わせたものを法とする。不足の子に盈の母を乗じ，盈の子に不足の母を乗じ，これらを合わせたものを実とする。これをもどすには，啓広の術のようにすればよい。

［注］

1）開平法が知られる以前の開平の近似法が述べられている点興味がある。面積Sの正方形の一辺をaと

	盈	不足
子	s	r
母	b	a

したとき $r=S-a^2$ だけ不足し，また一辺を b としたとき，$s=b^2-S$ ほど盈（あま）るものとする。ここで「分銭」の「盈不足の術」を用いる。まず子の盈と不足を足して法 $r+s=b^2-a^2$ とする。次に不足の子に盈の母を乗じ rb，盈の子に不足の母を乗じ sa，これらの和（つまり維乗したものの和）$rb+sa$ を実とする。これにより $\sqrt{S}$ の近似値 $a_1=\dfrac{rb+sa}{r+s}=\dfrac{S+ab}{a+b}$ として求められる。「米出銭」の注1）での $F(x)$ が x^2 の場合であるから，この近似値は a や b より近い近似値である。しかも $F(x)$ は下に凸であるので，a_1 は真の値より小さい近似値である。

2）『算数書』64に「啓広」の項がある。この「啓広の術」とは長方形の面積 S と一辺が与えられているとき，他辺を求める方法であるから，S をこの近似値 a_1 で割って，もう一つの $\sqrt{S}$ の近似値 b_1 を求めることができる。a_1 が小さい近似値なら b_1 は大きい近似値である。ここに「啓広の術」についての記述があるのは，新らしい近似値 a_1 や b_1 はもとの値 a や b より詳しい近似値であることを確認させるためであろう。

3）この記述をヒントにして，開平法の近似解の簡単な求め方を述べておこう。$\sqrt{S}$ の近似値として小さい目の近似値 a と，大きい目の近似値 b から出発する。注1）で求めたように近似値 a_1 を求め，注2）のように b_1 を求める。（$S=a_1b_1$ である。）再び近似値 a_1，b_1 から「分銭」や「米出銭」の「盈不足の術」によって，より詳しい近似値 a_2 や b_2 を求めることができる。つまり $b_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，$a_2=\dfrac{S}{b_2}=\dfrac{2a_1b_1}{a_1+b_1}$ で，一般に $b_{i+1}=\dfrac{a_i+b_i}{2}$，$a_{i+1}=\dfrac{2a_ib_i}{a_i+b_i}$（$a_i$，$b_i$ の調和平均）となっている。

このことを利用して，具体的に $\sqrt{2}$ の近似値を求めてみよう。$S=2$ であるから，$a=1$，$b=2$ として出発する。$a_1=\dfrac{4}{3}$，$b_1=\dfrac{3}{2}$，$a_2=\dfrac{24}{17}$，$b_2=\dfrac{17}{12}$ である。$b_3=\dfrac{577}{408}=1.4142156\cdots$，$a_3=\dfrac{816}{577}=1.4142114\cdots$ で，さらに $b_4=\dfrac{665857}{470832}=1.414213562374\cdots$，$a_4=\dfrac{941664}{665857}=1.414213562371\cdots$ となるので，計算は簡単でしかも収束もかなり早い。

参考文献

［1］ 大川俊隆「「張家山漢簡『算数書』研究会」の発足にあたって」（大阪産業大学論集人文科学編107号，2002年6月）

［2］ 大川俊隆「「張家山漢簡『算数書』註釈」緒論（訳）（上）」（大阪産業大学論集人文科学編107号，2002年6月）

［3］ 大川俊隆「「張家山漢簡『算数書』註釈」緒論（訳）（下）」（大阪産業大学論集人文科学編107号，2002年10月）

［4］ 城地茂「『算数書』日本語訳」（和算研究所紀要 No.4. 2001年3月25日）

［5］ 蘇意雯他「『算数書』校勘」(HPM 通訊3-12。2000年11月)
［6］ 張家山漢墓竹簡整理小組『江陵張家山漢簡『算数書』釈文』(文物, 2000年９月)
［7］ 張家山漢墓竹簡整理小組『張家山漢墓竹簡［245号墓］』(2002年１月)
［8］ 白尚恕『《九章算術》註釈』(科学出版社, 1983年)
［9］ 彭浩『張家山漢簡《算数書》注釈』(科学出版社, 2001年７月)
[10] 薮内清編『科学の名著２, 中国天文学・数学集』(朝日出版社, 1980年11月)
[11] 郭書春「算数書校勘」(中国科学史料22巻3期, 2001年９月)
[12] 郭世栄「《算数書》勘誤」(内蒙古師大学報自然科学（漢文）版, 30巻（３）, 2001年９月)
[13] 田村誠「張家山漢簡『算数書』訳注稿（１）」(大阪産業大学論集人文科学編108号, 2002年10月)
[14] 彭浩「「張家山漢簡《算数書》的“并租”与“啓従（縦）”」」(考古　2002年第５期)
[15] 大川俊隆・小寺裕「張家山漢簡『算数書』訳注稿（2)」(大阪産業大学論集人文科学編109号, 2003年３月)
[16] 田村誠「張家山漢簡『算数書』についてI,『方田章対応部分について』(数理解析研究所講究録1317, 2003年５月)
[17] 岡山茂彦「張家山漢簡『算数書』訳注稿（3)」(大阪産業大学論集人文科学編111号, 2003年10月)
[18] 張替俊夫「張家山漢簡『算数書』訳注稿（4)」(大阪産業大学論集人文科学編112号, 2004年２月)
[19] 鄒大海「出土『算数書』校釈一則」(インターネット版2004.4.14)