大阪産業大学論集　自然科学編　第120号　2008

多重クラスタ誤り訂正２次元線形符号が有する検査点数の下界

常盤　欣一朗*，水上　賢一*

A Lower Bound on the Number of Parity-Check Bits of Multiple-Cluster-Error Correcting Two-Dimensional Linear Codes

TOKIWA Kin-ichiroh and MIZUKAMI Ken-ichi

abstract

Recently, two-dimensional or three-dimensional error correction coding schemes have been widely studied in the context of optical recording applications such as page-oriented optical memories and volume holographic storage. Our main interest is to propose an efficient family of two-dimensional linear codes which can correct multiple cluster-errors. Before giving a code construction method, it is very important to know the number of parity-check bits required for such codes. In this article, a new lower bound is derived on the number of parity-check bits of two-dimensional linear codes capable of correcting multiple cluster-errors.

Key words：Two-dimensional codes, linear codes, cluster-errors, multiple-cluster-error correction.

まえがき

光記録の分野などにおいては，２次元あるいは３次元に配列された情報の信頼性を向上させるために，様々な種類の誤りに対して有効な効率の良い誤り訂正符号が必要とされている。最近では，Schwartz-Etzion［1］によって，単一クラスタ誤りを訂正することができる効率の良い２次元線形符号の構成法がいくつか提案された。彼らが提案した構成法の中には，符号を構成する際に使用するガロア体$GF(2^m)$の拡大次数mが偶数でなければならないという制限が課せられているものがある。筆者ら［2, 3, 4］はこの点に着目して詳細な検討を行い，その

2008年３月14日　原稿受理

* 大阪産業大学　工学部電子情報通信工学科

結果，m を奇数とした場合にもSchwartz-Etzion構成法を適用することができることを明らかにした。

上述のSchwartz-Etzion構成法を用いれば，クラスタ誤りのサイズが2または3であるときには単一クラスタ誤りを訂正可能な効率の良い2次元線形符号を得ることができる。しかしながら，これらの符号は，対象とするクラスタ誤りのサイズが小さく，実用性を考えた場合には必ずしも十分な訂正能力を有するとは言えない。ところが，クラスタ誤りのサイズを増加させるとともに考慮すべき誤りパターン数が急激に増えるために，より大きなサイズのクラスタ誤りに対して符号を構成することはかなり困難な問題になる。そこで，筆者らは，より強力な訂正能力を有する2次元線形符号を構成するための一つのアプローチとして，サイズ2のクラスタ誤りが複数箇所で生起するような多重クラスタ誤りを訂正することができる効率の良い2次元線形符号の構成について検討を行っている。本論文では，多重クラスタ誤り訂正2次元線形符号が有する検査点数の下界を与える。検査点数の下界値は，構成された符号の符号化効率を評価するための一つの指標として符号理論の分野では一般に利用されるものであり，符号を構成する際には極めて重要な役割を果たすパラメータの一つである。2節では，クラスタ誤りならびに多重クラスタ誤り訂正符号などの諸定義を述べる。そして，3節において，多重クラスタ誤りを訂正することができる2次元線形符号が有する検査点数の下界を導出する。

2 諸定義

まず，本論文で対象とする2次元線形符号の定義を与える。一般に，$GF(2)$上の2次元線形符号は3次元パリティ検査行列Hを用いて次のように定義される［1，5］。

定義1　線形独立なr個の$n_1 \times n_2$行列から得られる$GF(2)$上の$n_1 \times n_2 \times r$行列を$H = [h_{ij\ell}]$とする。このとき，$0 \leq \ell \leq r-1$に対して

$$\sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} c_{ij} h_{ij\ell} = 0 \qquad (1)$$

なる関係を満たすような$GF(2)$上のすべての$n_1 \times n_2$行列 $\boldsymbol{c} = [c_{ij}]$の集合が$GF(2)$上の$[n_1 \times n_2,\ n_1 n_2 - r]$ 2次元線形符号である。ここで，$n_1 \times n_2$は符号サイズ，$n_1 n_2 - r$は情報点数，rは検査点数を意味する。 □

次に，クラスタの定義［1］ならびに多重クラスタ誤り訂正符号の定義を与える。

定義2　サイズbのクラスタとは，クラスタ内の任意の2点間にそのクラスタ内の隣接する点だけから成るパスが存在するようなb個の点の集合である。また，サイズbのt重クラスタ誤りとは，t組のサイズbのクラスタ内に生起する任意の個数の誤りのことである。そして，サイズbのt重以下のクラスタ誤りをすべて訂正することができる2次元線形符号がサイズbのt重クラスタ誤り訂正符号である。 □

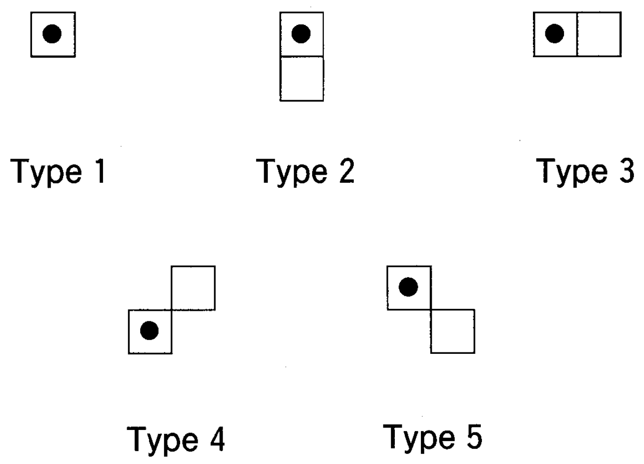


図1　サイズ2の単一クラスタ誤りの全パターン

Schwartz-Etzion[1]は，クラスタ内の点の結びつき方に関して，“＋モデル”，“$*$ モデル”，“✳モデル”と呼ぶ3種類のモデルを与えている。また，これらのモデルはそれぞれ“diamondモデル”，“hexagonalモデル”，“squareモデル”とも呼ばれる[6]。各モデルにおいて，点(i,j)に隣接する点は次の通りである。

i)　＋モデルの場合（4点）

$$\{(i-1,j),\ (i+1,j),\ (i,j-1),\ (i,j+1)\}$$

ii)　$*$ モデルの場合（6点）

$$\{(i-1,j),\ (i+1,j),\ (i,j-1),\ (i,j+1),\ (i-1,j+1),\ (i+1,j-1)\}$$

iii)　✳モデルの場合（8点）

$$\{(i-1,j),\ (i+1,j),\ (i,j-1),\ (i,j+1),\ (i-1,j+1),\ (i+1,j+1),\ (i-1,j-1),\ (i+1,j-1)\}$$

図1に，サイズ2の単一クラスタ誤りの全パターンを示す。図中で•をつけた箇所は各誤りパターンが生起する位置を示すための基準点である。また，□は誤りが生起している位置を表す。従って，基準点を(i,j)とすると，誤りが生起している位置は，

Type 1の場合：　$\{(i,j)\}$

Type 2の場合：　$\{(i,j),\ (i+1,j)\}$

Type 3の場合：　$\{(i,j),\ (i,j+1)\}$

Type 4の場合：　$\{(i,j),\ (i-1,j+1)\}$

Type 5の場合：　$\{(i,j),\ (i+1,j+1)\}$

である。そして，各モデルにおいて生起する誤りは，

＋モデルの場合：Type 1，2，3の誤り

$*$ モデルの場合：Type 1，2，3，4の誤り

∗モデルの場合： Type 1，2，3，4，5 の誤り

である。

3　検査点数の下界

本節では，サイズ 2 の $t(\geq 2)$ 重クラスタ誤り訂正符号が有する検査点数の下界を与える。ここで，誤りパターンの総数を $\mathcal{E}_{total}^{(t)}$，検査点数 r の下界値を $r^{(t)}$ とすると，明らかに $r^{(t)} = \left\lceil \log_2 \mathcal{E}_{total}^{(t)} \right\rceil$ であるので，起こり得る誤りパターンの総数 $\mathcal{E}_{total}^{(t)}$ を正確に算出すれば下界値 $r^{(t)}$ を導出することができる。$t=2$ の場合にはこのような誤りパターンの総数を正確に算出可能である。しかしながら，$t \geq 3$ になると，重複してカウントされる誤りパターンを特定することが難しくなり，誤りパターンの総数を正確に算出することが困難になる(実際には，ほとんど不可能である)。そこで以下では，$t=2$ の場合と $t \geq 3$ の場合に分けて議論する。

3.1　$t=2$ の場合

3.1.1　主定理

サイズ 2 の 2 重クラスタ誤り訂正符号に対して検査点数の下界値 $r^{(2)}$ は次のように与えられる。

定理 1　サイズ 2 の 2 重クラスタ誤り訂正符号が有する検査点数 r は

$$r \geq r^{(2)} = \left\lceil \log_2 \mathcal{E}_{total}^{(2)} \right\rceil \tag{2}$$

なる関係を満たす。ここで，符号サイズを $n_1 \times n_2$ としたとき

i) ＋モデルに対して

$$\mathcal{E}_{total}^{(2)} = \frac{9}{2}n_1^2n_2^2 - 3n_1^2n_2 - 3n_1n_2^2 - \frac{33}{2}n_1n_2 + \frac{1}{2}n_1^2 + \frac{1}{2}n_2^2 + \frac{31}{2}n_1 + \frac{31}{2}n_2 - 8 \tag{3}$$

ii) ∗ モデルに対して

$$\mathcal{E}_{total}^{(2)} = 8n_1^2n_2^2 - 8n_1^2n_2 - 8n_1n_2^2 - 30n_1n_2 + 2n_1^2 + 2n_2^2 + 41n_1 + 41n_2 - 44 \tag{4}$$

iii) ∗モデルに対して

$$\mathcal{E}_{total}^{(2)} = \frac{25}{2}n_1^2n_2^2 - 15n_1^2n_2 - 15n_1n_2^2 - \frac{107}{2}n_1n_2 + \frac{9}{2}n_1^2 + \frac{9}{2}n_2^2 + \frac{171}{2}n_1 + \frac{171}{2}n_2 - 108 \tag{5}$$

である。 □

3.1.2 式(3)の導出

＋モデルの場合に考慮すべき誤りパターンは図１に示したType 1，2，3の誤りである。

1）単一クラスタ誤りのパターン数

単一クラスタ誤りの基準点を(i,j)とする。Type 1の場合，基準点の取り得る範囲は$0 \le i \le n_1-1$，$0 \le j \le n_2-1$であるので，そのパターン数はn_1n_2となる。また，Type 2の場合，基準点の取り得る範囲は$0 \le i \le n_1-2$，$0 \le j \le n_2-1$であるので，そのパターン数は$(n_1-1)n_2$となる。同様に，Type 3の場合，基準点の取り得る範囲は$0 \le i \le n_1-1$，$0 \le j \le n_2-2$であるので，そのパターン数は$n_1(n_2-1)$となる。明らかに，以上の誤りパターンが重複することはない。従って，単一クラスタ誤りのパターン数N_{single}は

$$\begin{aligned} N_{single} &= n_1n_2 + (n_1-1)n_2 + n_1(n_2-1) \\ &= 3n_1n_2 - n_1 - n_2 \end{aligned} \tag{6}$$

で与えられる。

2）2重クラスタ誤りのパターン数

Type 1，2，3の単一クラスタ誤りを任意に組合せて得られる2重クラスタ誤りについて考える。

2-a) Type 1と1の組合せ：

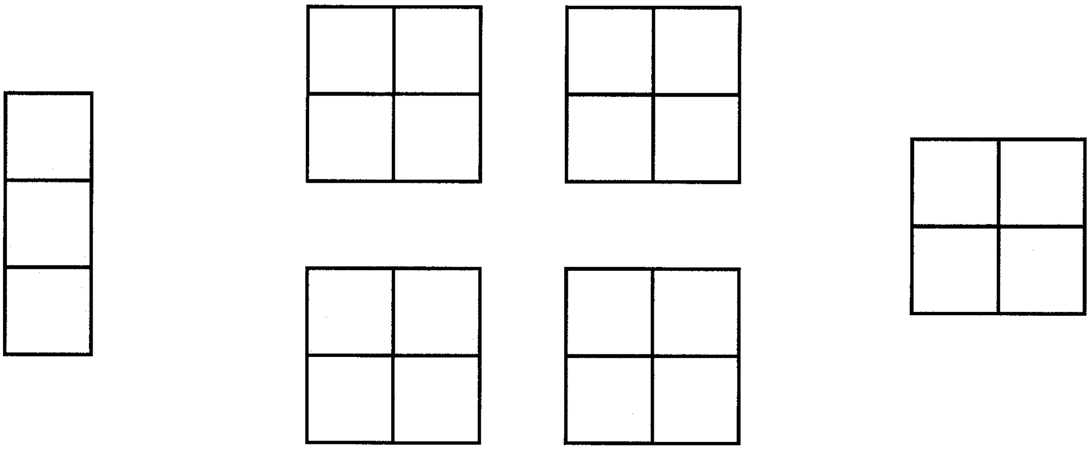
二つのType 1の誤りに対する基準点の選び方は，n_1n_2個の位置から異なる2箇所を選ぶ組合せの数に等しいので，明らかに$\binom{n_1n_2}{2}$通りある。ところが，これらの中にはType 2の単一クラスタ誤りと同一のパターンになるものが$(n_1-1)n_2$個，Type 3の単一クラスタ誤りと同一のパターンになるものが$n_1(n_2-1)$個含まれている。従って，Type 1と1を組合せた2重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(1,1)}$は

$$\begin{aligned} N_{double(1,1)} &= \binom{n_1n_2}{2} - (n_1-1)n_2 - n_1(n_2-1) \\ &= \frac{1}{2}n_1^2n_2^2 - \frac{5}{2}n_1n_2 + n_1 + n_2 \end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる。

2-b) Type 1と2またはType 1と3の組合せ：

まず，Type 1と2の組合せについて考える。これらの誤りに対する基準点をそれぞれ(i_1,j_1)および(i_2,j_2)とする。基準点(i_2,j_2)の取り方は$(n_1-1)n_2$通りある。そして，(i_2,j_2)のそれぞれの取り方に対して，基準点(i_1,j_1)を$(n_1-2)+n_1(n_2-1)$通り取ることができる。ところが，これらの中には図2(a)のような列方向の連続した3箇所に生起する誤りパターンが重複して含まれ，それらは$(n_1-2)n_2$個存在する。従って，Type 1と2を組合せた2重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(1,2)}$は次式のように与えられる。



(a)　　　　(b)　　　　(c)

(網掛け部分が誤り位置を示す)

図 2　2 重クラス誤りの重複パターン (1)

$$
\begin{aligned}
N_{double(1,2)} &= (n_1-1)n_2\{(n_1-2)+n_1(n_2-1)\}-(n_1-2)n_2 \\
&= n_1^2n_2^2-n_1n_2^2-3n_1n_2+4n_2 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

次に，Type 1 と 3 の組合せについて考える。この場合には，行と列を入れ換えて考えることによって，Type 1 と 2 の組合せの場合と全く同様にして誤りパターン数を求めることができる。その結果，Type 1 と 3 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数 $N_{double(1,3)}$ は次式のように与えられる。

$$
N_{double(1,3)} = n_1^2n_2^2-n_1^2n_2-3n_1n_2+4n_1 \qquad (9)
$$

最後に，重複してカウントされている誤りパターンについて考える。式(8)と(9)には，図 2 (b)のような 2×2 のマス目の中のいずれか3箇所に誤りが生起するような場合が重複して含まれている。明らかに，このような誤りパターンは $4(n_1-1)(n_2-1)$ 個存在する。

以上より，Type 1 と 2 またはType 1 と 3 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数 $N_{double\{(1,2)+(1,3)\}}$ は

$$
\begin{aligned}
N_{double\{(1,2)+(1,3)\}} &= N_{double(1,2)}+N_{double(1,3)}-4(n_1-1)(n_2-1) \\
&= 2n_1^2n_2^2-n_1^2n_2-n_1n_2^2-10n_1n_2+8n_1+8n_2-4 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

で与えられる。

2-c) Type 2 と 2 またはType 3 と 3 の組合せ：

まず，Type 2 と 2 の組合せについて考える。これらの誤りに対する基準点をそれぞれ (i_2, j_2) および (i'_2, j'_2) とする。一方の基準点 (i_2, j_2) を $0\leq i_2\leq n_1-2$，$0\leq j_2\leq n_2-1$ の中のどこか一点に固定したとき，他方の基準点 (i'_2, j'_2) が取り得る範囲は次のようになる。

- $0 \leq i_2 \leq n_1 - 4$, $0 \leq j_2 \leq n_2 - 2$ のとき
  $i_2+2 \leq i'_2 \leq n_1-2$, $j'_2 = j_2$ 　または　 $0 \leq i'_2 \leq n_1-2$, $j_2+1 \leq j'_2 \leq n_2-1$

- $0 \leq i_2 \leq n_1 - 4$, $j_2 = n_2 - 1$ のとき
  $i_2 + 2 \leq i'_2 \leq n_1 - 2$, $j'_2 = j_2$

- $n_1 - 3 \leq i_2 \leq n_1 - 2$, $0 \leq j_2 \leq n_2 - 2$ のとき
  $0 \leq i'_2 \leq n_1 - 2$, $j_2 + 1 \leq j'_2 \leq n_2 - 1$

- $n_1 - 3 \leq i_2 \leq n_1 - 2$, $j_2 = n_2 - 1$ のとき
  i'_2, j'_2 は存在しない

従って，Type 2 と 2 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(2,2)}$は次式のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
N_{double(2,2)} =& \sum_{j_2=0}^{n_2-2} \sum_{i_2=0}^{n_1-4} \{(n_1 - 3 - i_2) + (n_1 - 1)(n_2 - 1 - j_2)\} \\
&+ \sum_{i_2=0}^{n_1-4} (n_1 - 3 - i_2) + \sum_{j_2=0}^{n_2-2} \sum_{i_2=n_1-3}^{n_1-2} (n_1 - 1)(n_2 - 1 - j_2) \\
=& \frac{1}{2} n_1^2 n_2^2 - n_1 n_2^2 - \frac{3}{2} n_1 n_2 + \frac{1}{2} n_2^2 + \frac{5}{2} n_2 \qquad (11)
\end{aligned}
$$

次に，Type 3 と 3 の組合せについて考える。この場合には，行と列を入れ換えて考えることによって，Type 2 と 2 の組合せの場合と全く同様にして誤りパターン数を求めることができる。その結果，Type 3 と3を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(3,3)}$は次式のように与えられる。

$$
N_{double(3,3)} = \frac{1}{2} n_1^2 n_2^2 - n_1^2 n_2 - \frac{3}{2} n_1 n_2 + \frac{1}{2} n_1^2 + \frac{5}{2} n_1 \qquad (12)
$$

最後に，重複してカウントされている誤りパターンについて考える。式(11)と(12)には，図2(c)のような 2 × 2 のマス目の中の 4 箇所すべてに誤りが生起するような場合が重複して含まれている。明らかに，このような誤りパターンは$(n_1 - 1)(n_2 - 1)$個存在する。

以上より，Type 2 と 2 またはType 3 と 3 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数$N_{double\{(2,2)+(3,3)\}}$は

$$
\begin{aligned}
N_{double\{(2,2)+(3,3)\}} =& N_{double(2,2)} + N_{double(3,3)} - (n_1 - 1)(n_2 - 1) \\
=& n_1^2 n_2^2 - n_1^2 n_2 - n_1 n_2^2 - 4 n_1 n_2 + \frac{1}{2} n_1^2 + \frac{1}{2} n_2^2 + \frac{7}{2} n_1 + \frac{7}{2} n_2 - 1 \qquad (13)
\end{aligned}
$$

で与えられる。

2-d）Type 2 と 3 の組合せ：

Type 2 と 3 の誤りに対する基準点をそれぞれ(i_2, j_2)および(i_3, j_3)とする。Type 2 の誤りに

対する基準点(i_2, j_2)を$0 \leq i_2 \leq n_1 - 2$，$0 \leq j_2 \leq n_2 - 1$の中のどこか一点に固定したとき，Type 3 の誤りに対する基準点(i_3, j_3)が取り得る範囲は次のようになる。

- $0 \leq i_2 \leq n_1 - 2$，$j_2 = 0$のとき
  $0 \leq i_3 \leq i_2 - 1$，$j_3 = 0$　または　$i_2 + 2 \leq i_3 \leq n_1 - 1$，$j_3 = 0$
  　または　$0 \leq i_3 \leq n_1 - 1$，$1 \leq j_3 \leq n_2 - 2$
- $0 \leq i_2 \leq n_1 - 2$，$j_2 = n_2 - 1$のとき
  $0 \leq i_3 \leq i_2 - 1$，$j_3 = n_2 - 2$　または　$i_2 + 2 \leq i_3 \leq n_1 - 1$，$j_3 = n_2 - 2$
  　または　$0 \leq i_3 \leq n_1 - 1$，$0 \leq j_3 \leq n_2 - 3$
- $0 \leq i_2 \leq n_1 - 2$，$1 \leq j_2 \leq n_2 - 2$のとき
  $0 \leq i_3 \leq i_2 - 1$，$0 \leq j_3 \leq n_2 - 2$　または　$i_2 \leq i_3 \leq i_2 + 1$，$0 \leq j_3 \leq j_2 - 2$
  　または　$i_2 \leq i_3 \leq i_2 + 1$，$j_2 + 1 \leq j_3 \leq n_2 - 2$
  　　または　$i_2 + 2 \leq i_3 \leq n_1 - 1$，$0 \leq j_3 \leq n_2 - 2$

従って，Type 2 と 3 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(2,3)}$は

$$\begin{aligned} N_{double(2,3)} &= 2 \sum_{i_2=0}^{n_1-2} \{i_2 + (n_1 - 2 - i_2) + n_1(n_2 - 2)\} \\ &\quad + \sum_{j_2=1}^{n_2-2} \sum_{i_2=0}^{n_1-2} \{i_2(n_2 - 1) + 2(j_2 - 1) + 2(n_2 - 2 - j_2) + (n_1 - 2 - i_2)(n_2 - 1)\} \\ &= n_1^2 n_2^2 - n_1^2 n_2 - n_1 n_2^2 - 3n_1 n_2 + 4n_1 + 4n_2 - 4 \end{aligned} \tag{14}$$

で与えられる。

以上で得られた式(6)，(7)，(10)，(13)，(14)をまとめると，+モデルに対して，誤りパターンの総数$\mathcal{E}_{total}^{(2)+}$は，誤りなしの場合も含めて，式(3)のようになる。

3.1.3　式(4)の導出

＊モデルの場合に考慮すべき誤りパターンは図 1 に示したType 1，2，3，4の誤りである。従って，＊モデルに対する誤りパターンの総数$\mathcal{E}_{total}^{(2)*}$は，Type 4 の誤りが関係する誤りパターン数を+モデルに対する誤りパターンの総数$\mathcal{E}_{total}^{(2)+}$に加算することで求められる。

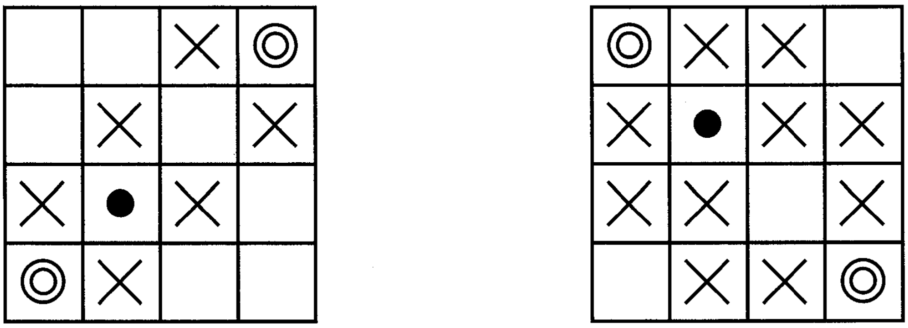
1）単一クラスタ誤りのパターン数

Type 4 の誤りに対する基準点を(i_4, j_4)とする。基準点の取り得る範囲は$1 \leq i_4 \leq n_1 - 1$，$0 \leq j_4 \leq n_2 - 2$であるので，そのパターン数は$(n_1 - 1)(n_2 - 1)$となる。ところが，これらの誤りはType 1 と 1 の組合せとして既にすべてカウントされている。

2）2 重クラスタ誤りのパターン数

2-a）Type 1 と 4 の組合せ：

Type 1 と 4 の誤りに対する基準点をそれぞれ(i_1, j_1)および(i_4, j_4)とする。基準点(i_4, j_4)の



（a）　　　　　　　　　　　　（b）

(網掛け部分：（a）Type 4 （b）Type 5）

図3　2重クラス誤りの重複パターン (2)

取り方は$(n_1-1)(n_2-1)$通りある。そして，(i_4,j_4)のそれぞれの取り方に対して，基準点(i_1,j_1)をn_1n_2-2通り取ることができる。ところが，これらの中から重複してカウントされるものを取り除く必要がある。図3 (a)に，Type 4の誤りの周りに生起するType 1の誤りのカウントの仕方を示す。Type 1の誤りが×の位置にあるときにはType 1，2，3のいずれかの組合せと重複するのでカウントしない。一方，Type 1の誤りが◎の位置にあるときにはType 1と4の組合せと重複するので1/2としてカウントする。ここで，基準点(i_4,j_4)の位置に応じて×と◎の個数を考慮すると次のようになる。

- $2\le i_4\le n_1-2$，$1\le j_4\le n_2-3$のとき，　×が6個，◎が2個
- $2\le i_4\le n_1-2$，$j_4=0$，n_2-2のとき，　×が5個，◎が1個
- $i_4=1$，n_1-1，$1\le j_4\le n_2-3$のとき，　×が5個，◎が1個
- $i_4=n_1-1$，$j_4=0$のとき，　×が4個，◎が1個
- $i_4=1$，$j_4=n_2-2$のとき，　×が4個，◎が1個
- $i_4=1$，$j_4=0$のとき，　×が4個，◎が0個
- $i_4=n_1-1$，$j_4=n_2-2$のとき，　×が4個，◎が0個

従って，Type 1と4を組合せた2重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(1,4)}$は

$$
\begin{aligned}
N_{double(1,4)} =& (n_1-3)(n_2-3)\left\{(n_1n_2-2)-6-\frac{1}{2}\times 2\right\} \\
&+2\{(n_1-3)+(n_2-3)\}\left\{(n_1n_2-2)-5-\frac{1}{2}\times 1\right\} \\
&+2\left\{(n_1n_2-2)-4-\frac{1}{2}\times 1\right\}+2\{(n_1n_2-2)-4\} \\
=& n_1^2n_2^2-n_1^2n_2-n_1n_2^2-8n_1n_2+12n_1+12n_2-16 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

で与えられる。

2-b) Type 2 と 4 またはType 3 と 4 の組合せ：

まず，Type 2 と 4 の組合せについて考える。これらの誤りに対する基準点をそれぞれ (i_2, j_2) および (i_4, j_4) とする。基準点 (i_4, j_4) の取り方は $(n_1-1)(n_2-1)$ 通りある。そして，重複を考慮すると，基準点 (i_2, j_2) は，

- $2 \leq i_4 \leq n_1-2$，$0 \leq j_4 \leq n_2-2$ のとき，　$(n_1-1)n_2-4$ 通り
- $i_4 = 1, n_1-1$，$0 \leq j_4 \leq n_2-2$ のとき，　$(n_1-1)n_2-3$ 通り

取ることができる。従って，Type 2 と 4 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数 $N_{double(2,4)}$ は次式のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
N_{double(2,4)} &= (n_1-3)(n_2-1)\{(n_1-1)n_2-4\}+2(n_2-1)\{(n_1-1)n_2-3\} \\
&= n_1^2n_2^2-n_1^2n_2-2n_1n_2^2-2n_1n_2+n_2^2+4n_1+5n_2-6 \qquad (16)
\end{aligned}
$$

次に，Type 3 と4の組合せについて考える。この場合には，行と列を入れ換えて考えることによって，Type 2 と 4 の組合せの場合と全く同様にして誤りパターン数を求めることができる。その結果，Type 3 と 4 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数 $N_{double(3,4)}$ は次式のように与えられる。

$$
N_{double(3,4)} = n_1^2n_2^2-2n_1^2n_2-n_1n_2^2-2n_1n_2+n_1^2+5n_1+4n_2-6 \qquad (17)
$$

以上より，Type 2 と4またはType 3 と 4 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数 $N_{double\{(2,4)+(3,4)\}}$ は

$$
\begin{aligned}
N_{double\{(2,4)+(3,4)\}} &= N_{double(2,4)}+N_{double(3,4)} \\
&= 2n_1^2n_2^2-3n_1^2n_2-3n_1n_2^2-4n_1n_2+n_1^2+n_2^2+9n_1+9n_2-12 \qquad (18)
\end{aligned}
$$

で与えられる。

2-c) Type 4 と 4 の組合せ：

二つのType 4 の誤りに対する基準点をそれぞれ (i_4, j_4) および (i_4', j_4') とする。一方の基準点 (i_4, j_4) を $1 \leq i_4 \leq n_1-1$，$0 \leq j_4 \leq n_2-2$ の中のどこか一点に固定したとき，他方の基準点

(i_4', j_4')が取り得る範囲は次のようになる。

- $i_4 = 1,\ 0 \leq j_4 \leq n_2 - 3$のとき
  $i_4 + 2 \leq i_4' \leq n_1 - 1,\ j_4' = j_4$　または　$i_4 + 1 \leq i_4' \leq n_1 - 1,\ j_4' = j_4 + 1$
  または　$1 \leq i_4' \leq n_1 - 1,\ j_4 + 2 \leq j_4' \leq n_2 - 2$

- $2 \leq i_4 \leq n_1 - 2,\ 0 \leq j_4 \leq n_2 - 3$のとき
  $i_4 + 2 \leq i_4' \leq n_1 - 1,\ j_4' = j_4$　または　$1 \leq i_4' \leq i_4 - 2,\ j_4' = j_4 + 1$
  または　$i_4 + 1 \leq i_4' \leq n_1 - 1,\ j_4' = j_4 + 1$
  または　$1 \leq i_4' \leq n_1 - 1,\ j_4 + 2 \leq j_4' \leq n_2 - 2$

- $i_4 = n_1 - 1,\ 0 \leq j_4 \leq n_2 - 3$のとき
  $1 \leq i_4' \leq i_4 - 2,\ j_4' = j_4 + 1$　または　$1 \leq i_4' \leq n_1 - 1,\ j_4 + 2 \leq j_4' \leq n_2 - 2$

- $1 \leq i_4 \leq n_1 - 2,\ j_4 = n_2 - 2$のとき
  $i_4 + 2 \leq i_4' \leq n_1 - 1,\ j_4' = j_4$

- $i_4 = n_1 - 1,\ j_4 = n_2 - 2$のとき
  $i_4',\ j_4'$は存在しない

従って，Type 4と4を組合せた2重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(4,4)}$は

$$
\begin{aligned}
N_{double(4,4)} =& \sum_{j_4=0}^{n_2-3} \{(n_1 - 3) + (n_1 - 2) + (n_1 - 1)(n_2 - 3 - j_4)\} \\
&+ \sum_{j_4=0}^{n_2-3} \sum_{i_4=2}^{n_1-2} \{(n_1 - 2 - i_4) + (i_4 - 2) + (n_1 - 1 - i_4) + (n_1 - 1)(n_2 - 3 - j_4)\} \\
&\quad + \sum_{j_4=0}^{n_2-3} \{(n_1 - 3) + (n_1 - 1)(n_2 - 3 - j_4)\} + \sum_{i_4=1}^{n_1-2} (n_1 - 2 - i_4) \\
=& \frac{1}{2} n_1^2 n_2^2 - n_1^2 n_2 - n_1 n_2^2 - \frac{3}{2} n_1 n_2 + \frac{1}{2} n_1^2 + \frac{1}{2} n_2^2 + \frac{9}{2} n_1 + \frac{9}{2} n_2 - 8
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

で与えられる。

以上で得られた式(3)，(15)，(18)，(19)をまとめると，$*$モデルに対して，誤りパターンの総数$\mathcal{E}_{total}^{(2)*}$は，誤りなしの場合も含めて，式(4)のようになる。

3.1.4 式(5)の導出

$\ast$モデルの場合に考慮すべき誤りパターンは図1に示したType 1，2, 3, 4, 5の誤りである。従って，$\ast$モデルに対する誤りパターンの総数$\mathcal{E}_{total}^{(2)\ast}$は，Type 5の誤りが関係する誤りパターン数を$*$モデルに対する誤りパターンの総数$\mathcal{E}_{total}^{(2)*}$に加算することで求められる。

1）単一クラスタ誤りのパターン数

Type 5の誤りに対する基準点を(i_5, j_5)とする。基準点の取り得る範囲は$0 \leq i_5 \leq n_1 - 2$，

$0 \leq j_5 \leq n_2 - 2$であるので，そのパターン数は$(n_1-1)(n_2-1)$となる。ところが，これらの誤りはType 1と1の組合せとして既にすべてカウントされている。

2） 2重クラスタ誤りのパターン数

2-a） Type 1と5の組合せ：

Type 1と5の誤りに対する基準点をそれぞれ(i_1, j_1)および(i_5, j_5)とする。基準点(i_5, j_5)の取り方は$(n_1-1)(n_2-1)$通りある。そして，(i_5, j_5)のそれぞれの取り方に対して，基準点(i_1, j_1)を$n_1 n_2 - 2$通り取ることができる。ところが，これらの中から重複してカウントされるものを取り除く必要がある。図3 (b)に，Type 5の誤りの周りに生起するType 1の誤りのカウントの仕方を示す。Type 1の誤りが×の位置にあるときにはType 1，2，3，4のいずれかの組合せと重複するのでカウントしない。一方，Type 1の誤りが◎の位置にあるときにはType 1と5の組合せと重複するので1/2としてカウントする。ここで，基準点(i_5, j_5)の位置に応じて×と◎の個数を考慮すると次のようになる。

- $1 \leq i_5 \leq n_1 - 3$, $1 \leq j_5 \leq n_2 - 3$のとき， ×が10個，◎が2個
- $1 \leq i_5 \leq n_1 - 3$, $j_5 = 0$, $n_2 - 2$のとき， ×が8個，◎が1個
- $i_5 = 0$, $n_1 - 2$, $1 \leq j_5 \leq n_2 - 3$のとき， ×が8個，◎が1個
- $i_5 = 0$, $j_5 = 0$のとき， ×が6個，◎が1個
- $i_5 = n_1 - 2$, $j_5 = n_2 - 2$のとき， ×が6個，◎が1個
- $i_5 = 0$, $j_5 = n_2 - 2$のとき， ×が6個，◎が0個
- $i_5 = n_1 - 2$, $j_5 = 0$のとき， ×が6個，◎が0個

従って，Type 1と5を組合せた2重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(1,5)}$は

$$\begin{aligned}
N_{double(1,5)} = &(n_1-3)(n_2-3)\left\{(n_1 n_2 - 2) - 10 - \frac{1}{2} \times 2\right\} \\
&+2\{(n_1-3)+(n_2-3)\}\left\{(n_1 n_2 - 2) - 8 - \frac{1}{2} \times 1\right\} \\
&+2\left\{(n_1 n_2 - 2) - 6 - \frac{1}{2} \times 1\right\} + 2\{(n_1 n_2 - 2) - 6\} \\
= &\, n_1^2 n_2^2 - n_1^2 n_2 - n_1 n_2^2 - 12 n_1 n_2 + 18 n_1 + 18 n_2 - 24 \qquad (20)
\end{aligned}$$

で与えられる。

2-b）Type 2 と 5 またはType 3 と 5 の組合せ：

まず，Type 2 と5の組合せについて考える。これらの誤りに対する基準点をそれぞれ(i_2, j_2)および(i_5, j_5)とする。基準点(i_5, j_5)の取り方は$(n_1-1)(n_2-1)$通りある。そして，重複を考慮すると，基準点(i_2, j_2)は，

- $1 \leq i_5 \leq n_1 - 3$，$0 \leq j_5 \leq n_2 - 2$ のとき，　$(n_1-1)n_2 - 6$ 通り
- $i_5 = 0$，$n_1 - 2$，$0 \leq j_5 \leq n_2 - 2$ のとき，　$(n_1-1)n_2 - 4$ 通り

取ることができる。従って，Type 2 と 5 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(2,5)}$は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} N_{double(2,5)} &= (n_1-3)(n_2-1)\{(n_1-1)n_2-6\} + 2(n_2-1)\{(n_1-1)n_2-4\} \\ &= n_1^2 n_2^2 - n_1^2 n_2 - 2n_1 n_2^2 - 4n_1 n_2 + n_2^2 + 6n_1 + 9n_2 - 10 \end{aligned} \tag{21}$$

次に，Type 3 と 5 の組合せについて考える。この場合には，行と列を入れ換えて考えることによって，Type 2 と 5 の組合せの場合と全く同様にして誤りパターン数を求めることができる。その結果，Type 3 と 5 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(3,5)}$は次式のように与えられる。

$$N_{double(3,5)} = n_1^2 n_2^2 - 2n_1^2 n_2 - n_1 n_2^2 - 4n_1 n_2 + n_1^2 + 9n_1 + 6n_2 - 10 \tag{22}$$

以上より，Type 2 と 5 またはType 3 と 5 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数$N_{double\{(2,5)+(3,5)\}}$は

$$\begin{aligned} N_{double\{(2,5)+(3,5)\}} &= N_{double(2,5)} + N_{double(3,5)} \\ &= 2n_1^2 n_2^2 - 3n_1^2 n_2 - 3n_1 n_2^2 - 8n_1 n_2 + n_1^2 + n_2^2 + 15n_1 + 15n_2 - 20 \end{aligned} \tag{23}$$

で与えられる。

2-c）Type 4 と 5 の組合せ：

Type 4 と 5 の誤りに対する基準点をそれぞれ(i_4, j_4)および(i_5, j_5)とする。基準点(i_5, j_5)の取り方は$(n_1-1)(n_2-1)$通りある。そして，重複を考慮すると，基準点(i_4, j_4)は，

- $1 \leq i_5 \leq n_1 - 3$，$1 \leq j_5 \leq n_2 - 3$ のとき，　$(n_1-1)(n_2-1) - 5$ 通り
- $1 \leq i_5 \leq n_1 - 3$，$j_5 = 0$，$n_2 - 2$ のとき，　$(n_1-1)(n_2-1) - 4$ 通り
- $i_5 = 0$，$n_1 - 2$，$1 \leq j_5 \leq n_2 - 3$ のとき，　$(n_1-1)(n_2-1) - 4$ 通り
- $i_5 = 0$，$n_1 - 2$，$j_5 = 0$，$n_2 - 2$ のとき，　$(n_1-1)(n_2-1) - 3$ 通り

取ることができる。従って，Type 4 と 5 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(4,5)}$は次式のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
N_{double(4,5)} &= (n_1-3)(n_2-3)\{(n_1-1)(n_2-1)-5\} \\
&\quad +2\{(n_1-3)+(n_2-3)\}\{(n_1-1)(n_2-1)-4\}+4\{(n_1-1)(n_2-1)-3\} \\
&= n_1^2n_2^2-2n_1^2n_2-2n_1n_2^2-n_1n_2+n_1^2+n_2^2+5n_1+5n_2-8
\end{aligned} \tag{24}
$$

2-d）Type 5 と 5 の組合せ：

二つのType 5 の誤りに対する基準点をそれぞれ(i_5, j_5)および(i'_5, j'_5)とする。一方の基準点(i_5, j_5)を$0 \le i_5 \le n_1-2$，$0 \le j_5 \le n_2-2$の中のどこか一点に固定したとき，他方の基準点(i'_5, j'_5)が取り得る範囲は次のようになる。

- $i_5 = 0$，$0 \le j_5 \le n_2-3$ のとき
  $i_5+2 \le i'_5 \le n_1-2$，$j'_5 = j_5$　または　$i_5+2 \le i'_5 \le n_1-2$，$j'_5 = j_5+1$
  または　$0 \le i'_5 \le n_1-2$，$j_5+2 \le j'_5 \le n_2-2$

- $1 \le i_5 \le n_1-3$，$0 \le j_5 \le n_2-3$ のとき
  $i_5+2 \le i'_5 \le n_1-2$，$j'_5 = j_5$　または　$0 \le i'_5 \le i_5-2$，$j'_5 = j_5+1$
  または　$i_5+2 \le i'_5 \le n_1-2$，$j'_5 = j_5+1$
  または　$0 \le i'_5 \le n_1-2$，$j_5+2 \le j'_5 \le n_2-2$

- $i_5 = n_1-2$，$0 \le j_5 \le n_2-3$ のとき
  $0 \le i'_5 \le i_5-2$，$j'_5 = j_5+1$　または　$0 \le i'_5 \le n_1-2$，$j_5+2 \le j'_5 \le n_2-2$

- $0 \le i_5 \le n_1-3$，$j_5 = n_2-2$ のとき
  $i_5+2 \le i'_5 \le n_1-2$，$j'_5 = j_5$

- $i_5 = n_1-2$，$j_5 = n_2-2$ のとき
  i'_5，j'_5 は存在しない

従って，Type 5 と 5 を組合せた 2 重クラスタ誤りのパターン数$N_{double(5,5)}$は

$$
\begin{aligned}
N_{double(5,5)} &= \sum_{j_5=0}^{n_2-3}\{(n_1-3)+(n_1-3)+(n_1-1)(n_2-3-j_5)\} \\
&\quad + \sum_{j_5=0}^{n_2-3}\sum_{i_5=1}^{n_1-3}\{(n_1-3-i_5)+(i_5-1)+(n_1-3-i_5)+(n_1-1)(n_2-3-j_5)\} \\
&\quad + \sum_{j_5=0}^{n_2-3}\{(n_1-3)+(n_1-1)(n_2-3-j_5)\} + \sum_{i_5=0}^{n_1-3}(n_1-3-i_5) \\
&= \frac{1}{2}n_1^2n_2^2 - n_1^2n_2 - n_1n_2^2 - \frac{5}{2}n_1n_2 + \frac{1}{2}n_1^2 + \frac{1}{2}n_2^2 + \frac{13}{2}n_1 + \frac{13}{2}n_2 - 12
\end{aligned} \tag{25}
$$

で与えられる。

以上で得られた式(4)，(20)，(23)，(24)，(25)をまとめると，∗モデルに対して，誤りパターンの総数$\mathcal{E}^{(2)*}_{total}$は，誤りなしの場合も含めて，式(5)のようになる。

3.2　$t \geq 3$の場合

クラスタ誤りの多重度tが3以上になると，誤りパターンの総数を正確に算出することが困難になり，前節と同様のアプローチでは検査点数の下界値を求めることができなくなる。そこで，以下の定理において，誤りパターンの数え上げ方法を工夫することによって検査点数の下界値を特定できることを示す。

定理2　符号サイズn_1n_2に対して

$$\left\lceil \log_2 \left\{ \sum_{i=0}^{t} \binom{n_1n_2 - \xi i}{i} \gamma^i \right\} \right\rceil = \left\lceil \log_2 \left\{ \sum_{i=0}^{t} \binom{n_1n_2}{i} \gamma^i \right\} \right\rceil \tag{26}$$

であるならば，サイズ2のt重クラスタ誤り訂正符号が有する検査点数rは

$$r \geq r^{(t)} = \left\lceil \log_2 \left\{ \sum_{i=0}^{t} \binom{n_1n_2}{i} \gamma^i \right\} \right\rceil \tag{27}$$

なる関係を満たす。ただし，γおよびξの値は，

i)　＋モデルの場合：$\gamma=3$，$\xi=7$

ii)　＊モデルの場合：$\gamma=4$，$\xi=9$

iii) ✳モデルの場合：$\gamma=5$，$\xi=13$

である。

表1　Type μとνの組で除外すべき基準点の個数

(a)　＋モデルの場合

	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$
$\mu=1$	4	7	7
$\mu=2$	7	6	3
$\mu=3$	7	3	6

(b)　＊モデルの場合

	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$
$\mu=1$	6	9	9	9
$\mu=2$	9	8	3	3
$\mu=3$	9	3	8	3
$\mu=4$	9	3	3	8

(c)　✳モデルの場合

	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$
$\mu=1$	8	11	11	13	13
$\mu=2$	11	10	3	5	5
$\mu=3$	11	3	10	5	5
$\mu=4$	13	5	5	10	4
$\mu=5$	13	5	5	4	10

(証明) 各モデルに対して，起こり得る誤りパターンの総数$\mathcal{E}_{total}^{(t)}$は

$$\sum_{i=0}^{t}\binom{n_1n_2-\xi i}{i}\gamma^i < \mathcal{E}_{total}^{(t)} < \sum_{i=0}^{t}\binom{n_1n_2}{i}\gamma^i \tag{28}$$

なる関係を満たす。ここで，式(28)の最右辺の値は，クラスタ誤りの生起する位置が重複することを許してカウントした場合の誤りパターン数であり，$\mathcal{E}_{total}^{(t)}$の値より必ず大きくなる。一方，最左辺の値は，表1を参考にして，クラスタ誤りが重複しないように十分に余裕をもってカウントした場合の誤りパターン数であり，$\mathcal{E}_{total}^{(t)}$の値より必ず小さくなる。ここで，$\gamma$の値は考慮すべき誤りのType数であり，$\xi$の値は表1における最大値である。なお，表1に示した数値は，Typeμの誤りに対する基準点を中心とする5×5の領域内において，Typeνの誤りに対する基準点を考えた場合に，パターンの重複を引き起こす基準点の個数と起こり得ない基準点の個数の和を示している。式(28)から，

$$\left\lceil \log_2\left\{\sum_{i=0}^{t}\binom{n_1n_2-\xi i}{i}\gamma^i\right\}\right\rceil \le r^{(t)} \le \left\lceil \log_2\left\{\sum_{i=0}^{t}\binom{n_1n_2}{i}\gamma^i\right\}\right\rceil \tag{29}$$

なる関係が得られるので，この定理が成立する。 □

n_1n_2の値をある程度大きくすると，式(26)が成り立つことは直感的にも明白である。このことは，多重クラスタ誤り訂正能力を有する2次元線形符号に対して検査点数の下界値を厳密に評価することができることを意味する。また，式(26)が成り立たなくても，式(29)を考慮すると，検査点数の下界値$r^{(t)}$が存在する範囲を限定することが可能である。

4 まとめ

本論文では，多重クラスタ誤りを訂正することができる新しい2次元線形符号，すなわち，多重クラスタ誤り訂正符号を構成するための基礎的な検討を行った。具体的には，サイズ2の多重クラスタ誤り訂正符号に対する検査点数の下界を導出し，符号化効率の点で優れた符号を構成する際に有効となる一つの指標を与えた。今後の課題としては，効率の良い多重クラスタ誤り訂正符号の構成法ならびに復号法について詳細に検討する予定である。

謝辞 本研究を進めるにあたり貴重なご意見を頂きました本学工学部電子情報通信工学科の山崎高弘講師に感謝致します。

参考文献

[1] M. Schwartz and T. Etzion, "Two-dimensional cluster-correcting codes," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.51, no.6, pp.2121-2132, June 2005.

[2] 折井祐介，常盤欣一朗，山崎高弘，“2次元線形符号のクラスタ誤り訂正能力について”，平成18年電気関係学会関西支部連合大会，G11-19，2006.

[3] 折井祐介，常盤欣一朗，山崎高弘，“サイズ3の単一クラスタ誤りを訂正可能な2次元線形符号に関する一考察”，第29回情報理論とその応用シンポジウム(SITA2006)予稿集，pp.743-746，2006.

[4] K. Tokiwa, Y. Orii, and T. Yamasaki, “A class of two-dimensional cluster-correcting codes based on Schwartz-Etzion's construction methods,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.54, no.5, pp.2383-2387, May 2008.

[5] 宮川洋，岩垂好裕，今井秀樹，符号理論，昭晃堂，1973.

[6] W. Weeks and R. E. Blahut, “The capacity and coding gain of certain checkerboard codes,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.44, no.3, pp.1193-1203, May 1998.