チェレンコフ自由電子レーザーの基礎理論解析

網脇恵章・山本幸男・草場光博・淺川　誠*

Fundamental Theory of Cherenkov Free Electron Laser

Yoshiaki TSUNAWAKI, Yukio Yamamoto, Mitsuhiro KUSABA and Makoto ASAKAWA *

Abstract

Some of free electron lasers (FELs) have been operated as users facilities in the wavelength region from ultraviolet to far infrared. All of them are huge, set up in a special building excluding x-ray radiation, and maintained by some operators. Therefore, everyone cannot necessarily use them every time when he wants to do his experiment. If it is possible for him to use a small sized FEL in his laboratory, FEL will be extended widely in various fields of scientific investigation. We have been researching on a micro field emitter for a small sized FEL based on Cherenkov effect. In order to develop a Cherenkov FEL the physics on it must be clarified. In this note theory of the Cherenkov FEL is summarized for our future work by referring to some publications.

はじめに

自由電子レーザー（Free Electron Laser:FEL）[1]は，光速近くまで加速された相対論的電子ビームと電磁場との共鳴的な相互作用により，コヒーレントな電磁波を発生させるものである。通常のガスレーザーや固体レーザーなどと異なって，発振波長が原子や分子などの特定のエネルギー準位に束縛されないため，周波数を連続的に変化させることができる。また電子のエネルギーが直接電磁波のエネルギーに変換されるため，高効率なものが，さらに高エネルギーでビーム電流の大きい電子ビームを用いることにより高出力が期待される。

FELの研究は1951年Motzの研究に始まり[2]，実験的には1976年にスタンフォード大学のEliasらがCO_2レーザー光をFELに注入してその増幅作用を確認し[3]，つづいて翌年に波長3.41μmのFEL発振に成功し[4]，それ以来世界各国の研究機関で精力的に研究が続けられ，users facilitiesとして多くのFEL装置が建設され，有用なデータが得られるに至っている。わが国も大阪大学の装置[5]に代表されるように，最もFEL研究の盛んな国の一つである。それらの設備の多くは，例えば波長数百μmの遠赤外線領域のFEL光を供出するカリフォルニア大学サンタバーバラ校の静電加速器を用いたFEL[6]以外は，多くはRF加速器を用いた波長数μmから数十μmの中赤外領域のものが殆どである。即ち，FELには大型の加速器が用いられ，全ての装置を放射線管理された特別な建屋に設置した大型研究施設となっている。そして現在のFEL研究は，大出力化およびx線やγ線領域の短波長化へと向かいつつある。

ところでそれ程大出力を必要としない研究を手軽に行いたい場合，上記のような大型FEL装置よりもむしろ，通常の実験室でも使用できるFEL装置が要求される。そのような装置が開発されればFELの応用範囲がさらに広がり，学術研究あるいは応用研究が益々発展することが期待される。もし電子ビームを用いて光を発生するものは全てFELの範疇に入るとするならば，超小型の半導体マイクロエミッター（電界放出電子銃アレイ：FEA）[7, 8]や我々が研究してきたタングステンやカーボ

平成16年11月２日　原稿受理
大阪産業大学　工学部電気電子工学科
＊大阪大学大学院自由電子レーザー研究施設

ンナノチューブ電界放出陰極[9,10] からの細い電子ビームを絶縁物や回折格子の表面近くを走らせることにより，前者ではチェレンコフ効果による，後者ではスミス・パーセル効果による FEL 光を発生し，ここにデスクトップ型の FEL が実現できことになる。我々は科学研究費で遠赤外チェレンコフ放射実験の準備を進めており，実験を遂行するに当たってその物理を明らかにしてそれを実験へ反映し，あるいは実験データの正しい評価ができるようにしておく必要がある。したがって本稿では，チェレンコフ放射に関するいろいろな論文や叢書[11,12] を下にして(特に文献12を中心に参考)，その原理を解説する。

1．チェレンコフ放射

よく知られているように荷電粒子は加速度をもって運動すると光を放出するが，媒質中を一様運動する場合でも，その速さが媒質中の光速度よりも大きい場合にも，荷電粒子は光を放出することができる。この現象は P.A.Cherenkov が高速電子を用いて1937年に初めて観測した[13]。荷電粒子の速度，媒質の屈折率，真空中の光速度をそれぞれ v, n, c とするならば，電子の運動する方向に対して

$$\cos\theta = c/(n\mathrm{v}) \tag{1.1}$$

で与えられる角度 θ の方向に光を放出する。即ち荷電粒子の位置を頂点とする頂角（$\pi/2-\theta$）の円錐形の波面をもち，一種の衝撃波のようになって伝搬する。そして電磁波の位相速度と荷電粒子の速度が殆ど等しいときは強く相互作用し，電子の速度が電磁波の位相速度よりも大きいなら，電磁波は電子からエネルギーを得て成長する。

チェレンコフ FEL では，誘電体表面近くに電子ビームを走らせ，誘電体内の電磁波が表面から染み出すいわゆるエバネッセント波と電子ビームとの相互作用によって，電子のエネルギーを電磁波へと移行させて電磁波を成長させる。本稿では，導体表面を x − z 面とし，その上にy方向に厚さ a の無限の幅を持つ誘電体を被覆し，そして導体表面よりy方向に距離 b の位置を端とする x，y 方向に無限の幅をもつ電子ビームが伝播する 2 次元モデルでのチェレンコフ現象について考える。

2．電磁界中での相対論的電子の運動方程式

Lorentz 変換は距離の 2 乗（$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2$）を不変とする 2 つの慣性系 S, S’ 間の一次変換

$$x'_j = \sum_{k=1}^{3} a_{ij}x_k \quad (\mathrm{j}=1,2,3,0) \tag{2.1}$$

として表される。本稿の場合は，$x_1=x, x_2=y$, $x_3=z, x_0=ct$ である。そして式（2.1）を座標系に無関係なパラメーター τ で微分し，$d\tau$ が固有時をとるとき

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} = \gamma\ ,$$

$$u_k = \frac{dx_k}{d\tau} = \frac{dx_k}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathrm{v}_k}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \tag{2.2}$$

となり，ここに式(2.3)のように 4 元速度が定義される。

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}},\ u_0 = \frac{c}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad \mathbf{v} = (\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z)$$

従って，式（2.3）を τ で微分すると，前者 3 つの式から空間成分の，最後の式から時間成分の 4 元加速度がそれぞれ次式のように求まる。

$$\mathbf{w} = \frac{1}{1-(\mathrm{v}/c)^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{\mathrm{v}}{c^2\left(1-(\mathrm{v}/c)^2\right)}\frac{d\mathrm{v}}{dt}\ ,$$

$$\mathrm{w}_0 = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}\left(1-(\mathrm{v}/c)^2\right)^2}\frac{d\mathrm{v}}{dt} \tag{2.4}$$

ある瞬間に質点と同じ速度で一様に運動する座標系 S_0 から見たニュートンの運動方程式は，相対論的にもそのまま成立し，

$$m_0\frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \mathbf{F}' \tag{2.5}$$

である。ここで $d\mathbf{v}'/dt'$，$\mathbf{F}'$ はそれぞれ S_0 系から見た質点の加速度とそこに働く力で，$dt'=d\tau$ である。従って一般の座標系 S に対しては，式（2.4）および（2.5）より

$$m_0\frac{d\mathbf{u}}{dt} = m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\right) = m_0\mathbf{w} = \mathbf{F},$$

$$m_0\frac{du_0}{dt} = m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\right) = m_0\mathrm{w}_0 = F_0 \tag{2.6}$$

である。

式（2.4）の第 1 式の両辺に $m\mathbf{v}_0$ を掛けるとその左辺より

$$m_0\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\right)\frac{dt}{d\tau}\cdot\mathbf{v}$$

$$= F\cdot\mathbf{v}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \tag{2.7}$$

となる。そして右辺は，$\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{v}^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{v}^2}{dt^2} = \mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}}{dt}$ の関係を用いて

$$\frac{m_0\mathrm{v}}{c\left(1-(\mathrm{v}/c)^2\right)^2}\frac{d\mathrm{v}}{dt}c = m_0\mathrm{w}_0 c = \frac{F_0}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}c \tag{2.8}$$

である。従って，式（2.7）と（2.8）より

$$F_0 = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c} \tag{2.9}$$

となる。式（2.6）の第２式すなわち時間成分の運動方程式と式（2.9）より

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\right) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \tag{2.10}$$

となる。ここに式（2.10）の右辺は仕事率，すなわち質点のエネルギー W の単位時間当たりの増加量（dW/dt）を意味する。従って質点のする仕事は

$$W = \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\right) = m_0\gamma c^2 \tag{2.11}$$

であり，v <<C のとき

$$W = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0\mathrm{v}^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{\mathrm{v}^4}{c^2} + \cdots \tag{2.12}$$

と展開される。右辺第１項は質点の静止エネルギーで，第２項以降は速度に関係する質点の運動エネルギー K である。よって式(2.11)を用いて運動エネルギー K は，

$$K = W - m_0c^2 = (\gamma - 1)\,m_0c^2 \tag{2.13}$$

と表される。

式（2.6）の第１式において

$$\mathbf{P} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\mathbf{v} = m_0\gamma\mathbf{v} \tag{2.14}$$

が運動量に相当するのでこれを時間 t で微分し，そこに同じく式（2.13）を t で微分して求まる

${}^{d\gamma}/_{dt} = {}^{1}/_{m_0c^2}{}^{dK}/_{dt}$ を代入すると

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{dK}{dt} + m_0\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{2.15}$$

である。一方，速度 v で運動する電荷 q の荷電粒子に電界 E が作用すると，粒子の仕事率は $q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$ で，この仕事の１秒間当たりの量は，粒子の運動エネルギーに変わる。即ち，

$$\frac{dK}{dt} = q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} \tag{2.16}$$

である。また電界 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の場を運動する電荷の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{2.17}$$

で与えられるので，式（2.15）～（2.17）より

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{\gamma m_0}\left[\mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right] \tag{2.18}$$

である。ここに γ の値も時間に依存して変化する場合の荷電粒子の運動方程式が得られた。

電子が電磁波（$\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$）の中を，その進行方向に沿って磁束密度 $\mathbf{B}_0$ の磁場，即ち縦磁場が存在する状態で速度 $\mathbf{v}_0$ で運動するとき，電子はそれら電磁場によって揺動し，その揺動速度を $\mathbf{v}$ とすると式（2.18）における $\mathbf{B}$ と $\mathbf{V}$ は，それぞれ $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}$ と $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$ となる。そして電磁波の場は小さいとすると，$\mathbf{E} << \mathbf{1}$, $\mathbf{B} << \mathbf{B}_0$, $\mathbf{v} << \mathbf{v}_0$ であるので式（2.18）は

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{\gamma m_0}\left[\mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}_0}{c^2}(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{E}) + \mathbf{v}_0\times\mathbf{B} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_0\right] \tag{2.19}$$

と書き表される。ただし，e は電子の電荷である。このとき運動する電子による電流密度 $\mathbf{J}$ は，

$$\mathbf{J} = -N_0e\mathbf{v} - ne\mathbf{v}_0 \tag{2.20}$$

となる。即ち右辺第1項は電子の速度変動に因り，第2項は電子の密度変動に因る項で n はその個数である。ただし N_0 は電子の総数である。

３．電子ビームが誘電体表面近くを運動するときの電磁場

一様な運動をする電子ビームに，電子密度あるいはその速度に微小な擾乱が生じると，電子ビームの進行方向に沿ってその擾乱が波動として伝搬する。即ち電子ビームの速度とほぼ等しい位相速度をもつ電磁波が共存する場合，空間電荷波が生じる。ここに電子は空間電荷波を介して電磁波とそれらのエネルギーの授受をすることになる。以下に先ず各層内すなわち電子ビーム内，真空層内および誘電体内での電磁場を求め，それらがカップリ

ングしてチェレンコフ光が成長する過程を見る。

ここでは z 方向に伝搬する TM 波について考える。即ち

$$\mathbf{E}=(0,E_y,E_z)\,,\,\mathbf{B}=(B_x,0,0) \tag{3.1}$$

であり，それらの成分は全て

$$M=M(y)\exp j\left(\omega t-k_z z\right) \tag{3.2}$$

の形で書き表され，また 2 次元モデルでの取り扱いなので $\partial/\partial x=0$ である。一方，電流密度は次式のように各成分で表される。

$$\mathbf{J}=(0,-N_0e\mathrm{v}_y,-N_0e\mathrm{v}_z-ne\mathrm{v}_0) \tag{3.3}$$

3．1　相対論的電子ビーム内の電磁場

マクスウェルの方程式を下に，相対論的電子ビーム内（$b<y<\infty$）の電磁界成分を求めると次のようになる。

$rot\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$ より

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}+jk_zE_y=-j\omega B_x \tag{3.4}$$

$rot\mathbf{B}/\mu_0=\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t+\mathbf{J}$ より

$$jk_zB_x=-j\frac{\omega}{c^2}E_y+\mu_0eN_0\mathrm{v}_y \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y}=-j\frac{\omega}{c^2}E_z+\mu_0e\left(n\mathrm{v}_0+N_0\mathrm{v}_z\right) \tag{3.6}$$

$\varepsilon_0 div\mathbf{E}=\rho=-ne$ より

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}-jk_zE_z=-\frac{e}{\varepsilon_0}n \tag{3.7}$$

縦磁場が存在しない，即ち $\mathbf{B}_0=0$ のとき，運動方程式（2.19）より

$$\mathrm{v}_y=j\frac{e}{\gamma m_0\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}\left(E_y+\mathrm{v}_0B_x\right) \tag{3.8}$$

$$\mathrm{v}_z=j\frac{e}{\gamma^3 m_0\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}E_z \tag{3.9}$$

である。式（3.5）と式（3.6）とから

$$n=j\frac{N_0}{\omega-\mathrm{v}_0k_z}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y}-jk_z\mathrm{v}_z\right) \tag{3.10}$$

となる。そして式（3.10）に式（3.5）と式（3.6）を代入すると

$$n=j\frac{N_0ek_z}{\gamma^3m_0\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)^2}E_z-\frac{N_0e}{\gamma m_0\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(E_y+\mathrm{v}_0B_x\right) \tag{3.11}$$

のように電磁界成分で n を表すことができる。また式（3.5）に式（3.8）を代入して B_x を E_y で表すと

$$B_x=-\frac{1}{c^2}\frac{\omega_p^2-\omega\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}{\omega_p^2\beta/c-k_z\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}E_y \tag{3.12}$$

となる。ここに $\beta=\mathrm{v}_0/\mathrm{c}$，$\omega_p=\sqrt{N_0e^2/(\varepsilon_0\gamma m_0)}$ であり，また $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ の関係を用いた。式（3.12）を式（3.11）に代入し，n を電界 E_y, E_z とに関する式に書き表し，それを式（3.7）に代入すると

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=-j\frac{\omega_p^2\beta/c-k_z\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}{\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}E_z \tag{3.13}$$

となり，式（3.4）と式（3.12）から

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=jk_y^2\frac{\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}{\omega_p^2\beta/c-k_z\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}E_y \tag{3.14}$$

である。ここに

$$k_y^2=k_z^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2 \tag{3.15}$$

である。式（3.14）を y で微分して式（3.13）を代入すると，E_z に関する微分方程式が次のように求められる。

$$\frac{\partial^2E_z}{\partial y^2}-k_y^2E_z=0 \tag{3.16}$$

ここに $y=\infty$ では全ての電磁界成分は 0 であるという条件の下に，式（3.16）を解くと

$$E_z=D\exp\left(-k_yy\right) \tag{3.17}$$

よって，式（3.14）より

$$E_y=j\frac{\omega_p^2\beta/c-k_z\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}{k_y\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}D\exp\left(-k_yy\right) \tag{3.18}$$

そして式（3.12）より

$$B_x=-j\frac{\omega_p^2-\omega\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}{c^2k_y\left(\omega-\mathrm{v}_0k_z\right)}D\exp\left(-k_yy\right) \tag{3.19}$$

と，相対論的電子ビームに沿って伝搬するＴＭ波の電磁界成分が全て得られた。但し，D は境界条件より決まる定数である。

3．2　真空層内での電磁場

前節の電子ビーム内の電磁場の特別な場合として，真空層内（$a<y<b$）の電磁界成分を以下のように求めることができる。真空層内には電子は存在しない，即ち $N_0=0$ なので，$\omega_p=0$ である。従って式（3.15）に倣って

$$h_y^2=k_z^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{3.20}$$

とおく。したがって式（3.16）より

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - h_y^2 E_z = 0 \qquad (3.21)$$

である。尚，この領域は限りなく誘電体層に近いので，ここを伝搬する電磁波の位相速度$c_v = \omega/k_z$は，いわゆる真空中での光速度よりも遅くなる。従って$k_z^2 = (\omega/c_v)^2 > (\omega/c)^2$であるので，$h_y^2 > 0$である。この条件の下に式（3.21）を解くと

$$E_z = \frac{(C_1 + C_2)}{2}\exp(h_y y) + \frac{(C_1 - C_2)}{2}\exp(-h_y y)$$

$$= C_1 \cosh(h_y y) + C_2 \sinh(h_y y) \qquad (3.22)$$

である。尚，C_1とC_2は境界条件より決まる定数である。他の電磁界成分については，式（3.13）と式（3.12）において$\omega_p = 0$とおき，前者と式（3.22）より

$$E_y = j\frac{k_z}{h_y}(C_1 \sinh(h_y y) + C_2 \cosh(h_y y)) \quad (3.23)$$

他方，後者と式（3.23）より

$$B_x = -j\frac{\omega}{c^2 h_y}(C_1 \sinh(h_y y) + C_2 \cosh(h_y y)) \qquad (3.24)$$

となる。

3．3　誘電体内での電磁場

上述した真空層内と同様に取り扱う。即ち，この領域（$0<y<a$）には電子ビームは存在しないので$N_0 = 0$および$n = 0$である。従って$\omega_p = 0$である。また誘電体内での電磁波の位相速度は$c/\sqrt{\varepsilon_r}$（ε_r：誘電体の比誘電率）であるので，式（3.15）に倣って

$$-p_y^2 = k_z^2 - \varepsilon_r\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \qquad (3.25)$$

とおく。したがって式（3.16）より

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + p_y^2 E_z = 0 \qquad (3.26)$$

である。誘電体が十分に厚ければ，電磁波の誘電体内での位相速度は$c/\sqrt{\varepsilon_r}$であるが，実際は有限の小さな厚さしか持たないので，実際の位相速度$c_d = \omega/k_z$はそれよりも大きい値となる。従って$k_z^2 = (\omega/c_d)^2 \le \varepsilon_r(\omega/c)^2$であるので，$p_y^2 \ge 0$である。$y = 0$のとき$E_z = 0$となる条件下で式（3.26）を解くと

$$E_z = A\sin(p_y y) \qquad (3.27)$$

である。尚，Aは境界条件より決まる定数である。他の電磁界成分については，式（3.13）と式（3.12）において$\omega_p = 0$，$c \Rightarrow c/\sqrt{\varepsilon_r}$とおき，式（3.13）と式（3.27）より

$$E_y = -j\frac{k_y}{p_y}A\cos(p_y y) \qquad (3.28)$$

式（3.12）と式（3.28）より

$$B_x = j\frac{\omega\varepsilon_r}{c^2 p_y}A\cos(p_y y) \quad (3.29)$$

である。

4．空間電荷波と電磁波によるカップリング波の分散関係

上述したように，各層内での電磁波の電磁界成分を求めることができた。それらがカップリングしてチェレンコフ光が成長する。ここではその成長する電磁波の分散関係を求める。そのためには，得られた各層での電磁界に対し境界条件を課して連立方程式を解くことになる。

異なる媒質a,bの境界面での電磁界の間には，よく知られているように

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b) = \mathbf{0} \qquad (4.1)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_b) = \mathbf{K} \qquad (4.2)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_a \mathbf{E}_a - \varepsilon_b \mathbf{E}_b) = \xi \qquad (4.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_b) = 0 \qquad (4.4)$$

の関係がある。但し，$\mathbf{n}$は境界面での法線ベクトルで，$\mathbf{K}$は表面電流密度，ξは表面電荷密度である。媒質aが真空で，媒質bが電子ビームとするならば，電子ビームの速度は$\mathbf{v}_0$であるので

$$\mathbf{K} = \xi\mathbf{v}_0 \qquad (4.5)$$

である。従って，式（4.5）を式（4.2）に代入し，さらに式（4.3）のξを代入すれば

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_b) = \frac{1}{c^2}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b)]\,\mathbf{v}_0 \qquad (4.6)$$

となる。以上の関係式を用いて，各層での境界条件を適用する。但し，誘電体，真空，電子ビームの各層の境界面での電磁界を区別するのに，それぞれ１，２，３の添え字を付す。

①誘電体表面での電磁界成分の関係は，式（4.1）および式（4.2）より，それぞれ以下のようになる。

$$E_{1z} - E_{2z} = 0 \qquad (4.7)$$

$$B_{1x} - B_{2x} = 0 \qquad (4.8)$$

②電子ビーム表面での電磁界成分の関係は，式（4.1）と式（4.6）より，それぞれ以下のようになる。

$$E_{2z} - E_{3z} = 0 \tag{4.9}$$

$$B_{2x} - B_{3x} + \frac{\beta}{c}\left(E_{2z} - E_{3z}\right) = 0 \tag{4.10}$$

境界の位置，即ち$y = a$, $y = b$を用いて式(4.7)～(4.10)に，節3で求めた式(3.17)～(3.19)，式(3.22)～(3.24)，式（3.27）～（3.29）を代入すると，係数A, C_1, C_2, Dに対する4つの線形代数方程式が求められる。特に式(4.10)を展開していくにはかなり計算が面倒かつ細心の注意が必要で，このとき電子ビームの等価比誘電率を次式のように定義する。

$$\varepsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2\left(\omega - \mathrm{v}_0 k_z\right)^2} \tag{4.11}$$

得られた代数方程式を，行列式を用いてまとめると

$$\begin{vmatrix} \sin\left(p_y a\right) & -\cosh\left(h_y a\right) & -\sinh\left(h_y a\right) & 0 \\ \dfrac{\varepsilon_r}{p_y}\cos\left(p_y a\right) & \dfrac{1}{h_y}\sinh\left(h_y a\right) & \dfrac{1}{h_y}\cosh\left(h_y a\right) & 0 \\ 0 & \cosh\left(h_y b\right) & \sinh\left(h_y b\right) & -\exp\left(-k_y b\right) \\ 0 & \dfrac{1}{h_y}\sinh\left(h_y b\right) & \dfrac{1}{h_y}\cosh\left(h_y b\right) & \dfrac{\varepsilon_p}{k_y}\exp\left(-k_y b\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ C_1 \\ C_2 \\ D \end{vmatrix} = 0 \tag{4.12}$$

となる。これが非自明の解を持つためには，A, C_1, C_2, Dの係数からなる行列式は0でなければならない。従ってn次正方行列$F = (a_{ij})$において，a_{ij}の余因子をΔ_{ij}とすると

$$\det F = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots\cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \tag{4.13}$$

であるので，それに従って計算すると

$$\varepsilon_p\left[\frac{p_y}{k_y}\tan\left(p_y a\right) - \varepsilon_r\frac{h_y}{k_y}\tanh\left(h_y\left(b-a\right)\right)\right]$$
$$+\frac{p_y}{h_y}\tan\left(p_y a\right)\tanh\left(h_y\left(b-a\right)\right) - \varepsilon_r = 0 \tag{4.14}$$

となる。ここにz軸に沿って伝搬するカップリング波の分散関係が求められた。

電子ビームが無い場合の，即ち誘電体に沿って伝搬する表面波の分散関係は，式（4.14）を下に次のように考えられる。電子ビームは無いのでと$b = \infty$とみなすことができ，そして$\omega_p = 0$である。従って，式（3.15）と式（3.20）より$k_y = h_y$で，また式（4.11）より$\varepsilon_p = 1$である。これらの関係を式(4.14)に適用すれば，

$$\frac{p_y}{h_y}\tan\left(p_y a\right) = \varepsilon_r \tag{4.15}$$

である。この分散曲線は，$\omega = ck_z$と$\omega = ck_z/\sqrt{\varepsilon_r}$の直線の間に存在し，$w$が大きくなると後者の直線に漸近する。そしてカットオフ周波数は，$h_y = 0$と$\tan\left(p_y a\right) = 0$の両式を満たすときに相当する。即ち，前者の関係式と式（3.20）より

$$k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{4.16}$$

である。また後者より$p_y a = n\pi$　(n =0, 1, 2,・・・)であるので，式（3.25）との関係より

$$\varepsilon_r\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{4.17}$$

である。従って，式（4.16）と式（4.17）とから，カットオフ周波数は

$$\omega = \frac{n\pi c}{a\sqrt{\varepsilon_e - 1}} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.18}$$

である。

誘電体が存在しないときの空間電荷波の分散関係も式(4.14)を下に同様に考えることができる。即ちa =0と見なすことができ，また$\varepsilon_r = 1$である。従って式(4.14)より，

$$\varepsilon_p\frac{h_y}{k_y}\tanh\left(h_y b\right) = -1 \tag{4.19}$$

のように分散関係が求まる。$\omega >> \omega_p$の条件を満たし周波数が十分に大きければ，$h_y = k_y$で$\tanh\left(h_y b\right) = 1$と近似できるので，式（4.19）と式（4.11）より

$$\omega = \mathrm{v}_0 k_z \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\omega_p}{\gamma} \tag{4.20}$$

の2つの直線で表される。即ち，式（4.19）で記述される分散曲線は，原点から2分枝に別れ，ωの増大と共に式（4.20）の直線に漸近する。上側の曲線を速い空間電荷波または正のエネルギー波，下側を遅い空間電荷波または負のエネルギー波という。

カップリングは，これら電磁波と空間電荷波の位相速度が等しくなる分散曲線上の(ω, k_z)点で生じる。即ち，式（4.15）と式（4.19）を満たす曲線の交点付近で強い相互作用が起き，遅い空間電荷波とのカップリング波が成長することになる。即ちこれがチェレンコフ放射光として成長する。

5．チェレンコフ放射光の成長率

上で求めた分散関係の式(4.14)は，式(4.15)と式(4.19)の曲線の交点付近では，$\omega >> \omega_p$の場合，次式のように表すことができる。

$$\left[\frac{p_y}{h_y}\tan(p_y a)-\varepsilon_r\right](\omega-\mathrm{v}_0 k_z)^2\exp\left[2h_y(b-a)\right]=\varepsilon_r\left(\frac{\omega_p}{\gamma}\right)^2 \tag{5.1}$$

そしてカップリングが生じる（ω, k_z）は，式（4.15）の電磁波の分散曲線と電子の分散関係を表す$\omega=\mathrm{v}_0 k_z$の直線との交点（ω_0, k_{z0}）の近くに存在する。従って，周波数は$\omega=\omega_0$に固定し，式（5.1）を満たすk_zをk_{z0}からのずれをδk_zとおいて求める。即ち，

$$k_z=k_{z0}+\delta k_z \ , |\delta k_z| << k_{z0} \tag{5.2}$$

である。交点において$h_y=h_{y0}$とするならば，$h_{y0}^2 \approx k_{z0}^2-(\omega_0/c)^2=k_{z0}^2-(\mathrm{v}_0 k_{z0}/c)^2$なので

$$h_{y0}=\frac{k_{z0}}{\gamma} \tag{5.3}$$

である。交点が（ω_0, k_{z0}）から（$\omega_0, k_{z0}+\delta k_z$）に移動したとき，式（5.1）の左辺第２，３項はそれぞれ

$$(\omega-\mathrm{v}_0 k_z)^2 \rightarrow \left[\omega_0-\mathrm{v}_0(k_{z0}+\delta k_z)\right]^2=\mathrm{v}_0^2(\delta k_z)^2 \tag{5.4}$$

$$\exp\left[2h_y(b-a)\right] \rightarrow \exp\left[2h_{y0}(b-a)\right] \tag{5.5}$$

と置き換わる。そしてそのときの第１項の変化量は

$$\delta\left[\frac{p_y}{h_h}\tan(p_y a)-\varepsilon_r\right]=\frac{\partial}{\partial k_z}\left[\frac{p_y}{h_h}\tan(p_y a)\right]\delta k_z \tag{5.6}$$

であるので，式（5.1）と式（5.4）～（5.6）から

$$(\delta k_z)^3=\varepsilon_r\left(\frac{\omega_p}{\gamma \mathrm{v}_0}\right)^2\exp\left[-2h_{y0}(b-a)\right]\Big/\frac{\partial}{\partial k_z}\left[\frac{p_y}{h_y}\tan(p_y a)\right] \tag{5.7}$$

と求まる。ここで式（3.20）と式（3.25）を用いて右辺の分母を計算すると

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial k_z}\left[\frac{p_y}{h_y}\tan(p_y a)\right]\\ &=\frac{p_y' h_y-p_y h_y'}{h_y^2}\tan(p_y a)-\frac{k_z}{h_y}\frac{a}{\cos^2(p_y a)}\\ &=-\frac{k_z}{h_y}\left[\frac{p_y^2+h_y^2}{p_y h_y^2}\tan(p_y a)+\frac{a}{\cos^2(p_y a)}\right]\end{aligned} \tag{5.8}$$

となる。節３で見たように，$h_y^2>0,\ p_y^2>0$であるのでh_y, p_yは実数で正の場合を考えれば良い。また$\omega=\mathrm{v}_0 k_{z0}$付近では$h_y<<1, p_y<<1$である。従って，$\tan(p_y a)>0$となるので

$$\frac{p_y}{h_y}\tan(p_y a)<0 \tag{5.9}$$

である。このことより式（5.7）は

$$(\delta k_z)^3=-\varepsilon_r\left(\frac{\omega_p}{\gamma \mathrm{v}_0}\right)^2\frac{\exp\left[-2h_{y0}(b-a)\right]}{\left|\frac{\partial}{\partial k_z}\left(\frac{p_y}{h_y}\tan(p_y a)\right)\right|}$$

$$=\varepsilon_r\left(\frac{\omega_p}{\gamma \mathrm{v}_0}\right)^2\frac{\exp\left[-2h_{y0}(b-a)\right]}{\left|\frac{\partial}{\partial k_z}\left(\frac{p_y}{h_y}\tan(p_y a)\right)\right|}\exp j(2m+1)\pi \ ,$$

$$(\mathrm{m}=0,1,2)$$

と表すことができ，従って，

$$\delta k_z=\varepsilon_r^{1/3}\left(\frac{\omega_p}{\gamma \mathrm{v}_0}\right)^{2/3}\frac{\exp\left[-\frac{2}{3}h_{y0}(b-a)\right]}{\left|\frac{\partial}{\partial k_z}\left(\frac{p_y}{h_y}\tan(p_y a)\right)\right|^{1/3}}\exp j\frac{(2m+1)}{3}\pi \ ,$$

$$(\mathrm{m}=0,1,2) \tag{5.10}$$

である。δk_zの値は，m=0のとき実数で，m=1, 2のとき互いに共役な複素数である。このようにして求められたδk_zを用い，（$\omega_0, k_{z0}+\delta k_z$）点での電磁波は

$$\begin{aligned}M&=M_0\exp j\left[\omega_0 t-(k_{z0}+\delta k_z)z\right]\\ &=M_0\exp j(\omega_0 t-k_{z0}z)\exp(-j\delta k_z z)\end{aligned} \tag{5.11}$$

であるので，式（5.10）を$\delta k_z=H\exp j(2m+1)\pi/3$と表すならば，m=0のとき式（5.11）は

$$M=M_0\exp j(\omega_0 t-k_{z0}z)\exp(-jHz/2)\exp\left(\sqrt{3}Hz/2\right)$$

$$=M_0\exp jG(t,z)\exp\left(\sqrt{3}Hz/2\right) \tag{5.12}$$

即ち，電磁波は伝搬と共に成長することを意味する。一方m=1のときは

$$\begin{aligned}M&=M_0\exp j(\omega_0 t-k_{z0}z)\exp(jHz)\\ &=M_0\exp jR(t,z)\end{aligned} \tag{5.13}$$

となり，振動項のみで表され，電磁波の成長も減衰も起こらないが，m＝2のときは，

$$M=M_0\exp jG(t,z)\exp\left(-\sqrt{3}Hz/2\right) \tag{5.14}$$

で，電磁波の伝搬と共にそれは減衰する。従って，ここに式（5.12）からその右辺の$\sqrt{3}H/2$がチェレンコフ放射光の振幅の成長率αを表し，

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_r^{1/3}\left(\frac{\omega_p}{\gamma \mathrm{v}_0}\right)^{2/3}\frac{\exp\left[-\frac{2}{3}h_{y0}(b-a)\right]}{\left|\frac{\partial}{\partial k_z}\left(\frac{p_y}{h_y}\tan(p_y a)\right)\right|^{1/3}} \tag{5.15}$$

と表される。式（5.15）より分かるように，誘電体と電子ビームの間隙（$b-a$）が大きくなると電磁波の振幅成長率は指数関数的に減少する。即ち，電磁波と空間電荷波の分布はそれぞれの表面に集中しており，表面から遠ざかるとそれぞれが指数関数的に減少し，相互作用が弱くなる。従って，有効にチェレンコフ放射光を得るには，できるだけ誘電体表面近くに電子ビームを伝搬させなければならない。

今までは電子ビームはｙ方向に無限の厚さをもつと仮定して取り扱ってきた。しかし，空間電荷波の電界強

度はビーム表面$y=b$で最大で，それよりyが大きいと指数関数的に小さくなる。従って，電界がビーム表面でのそれの$1/e$に減少するところまでのビーム厚さδが実効的電子ビーム厚さといえる。即ち，式（3.18）より$k_y\delta=1$であり，電子ビームが希薄であるときは$\omega_p\approx 0$で，$k_y\approx h_y$となるので

$$k_y\delta\approx h_y\delta=1 \tag{5.16}$$

である。カップリング点（ω_0, k_{z0}）では$\omega_0=\mathrm{v}_0 k_{z0}$なので式（5.3）より

$$h_{y0}=\frac{k_{z0}}{\gamma}=\frac{\omega_0}{\gamma\mathrm{v}_0} \tag{5.17}$$

である。従って，式（5.16）と式（5.17）より

$$\delta=\frac{1}{h_{y0}}=\frac{\gamma\mathrm{v}_0}{\omega_0} \tag{5.18}$$

となる。ここに電子ビームのエネルギーγが大きくなると，電磁波の電子ビームに対する表皮深さ が大きくなり，従って空間電荷波と電子ビームの相互作用領域が大きくなる。また式（5.15）より，

$$\alpha\propto\frac{1}{\gamma^{2/3}}\exp\left[-h_{y0}\left(b-a\right)\right]=\frac{1}{\gamma^{2/3}}\exp\left[-\frac{\omega_0}{\mathrm{v}_0}\frac{\left(b-a\right)}{\gamma}\right] \tag{5.19}$$

であるので，γが大きくなると誘電体と電子ビームの間隙（$b-a$）をそれだけ大きく取れることになる。

6．電子から電磁波へのパワー移行過程

上述したように，電磁波は空間電荷波とのカップリングを通して電子ビームからエネルギーを得て成長する。即ち，電子ビームはその運動エネルギーを電磁波に与えて速度は減少することになる。ここで，電磁波のパワーを$P(z)$，空間電荷波のパワーを$Q(z)$とし，$P(0)=P_0$, $Q(0)=0$と仮定すると

$$P(z)=P_0\exp\left(2\alpha z\right) \tag{6.1}$$

$$Q\left(z\right)=-P_0\left[\exp\left(2\alpha z\right)-1\right] \tag{6.2}$$

と表すことができる。ここに式（6.1）と式（6.2）よりエネルギー保存則

$$\frac{dP(z)}{dz}+\frac{dQ(z)}{dz}=0 \tag{6.3}$$

を満足するのが分かる。つまり，電磁波パワーの増加量は，空間電荷波のパワー減少量ということになる。

電磁波が伝搬するにつれて電磁波パワーと電子ビーム速度がどのように変化するかを見出すには，伝搬軸を微小な要素に分割し，各要素内でのそれらを順番に逐次求めればよい。即ち（1）各要素内での電子ビームの速度は一定と仮定し，（2）要素内での電磁波パワーの増大分を線形解析で求め，（3）電子ビームのパワー（ビームに垂直な平面を単位時間に通過するビームの運動エネルギー）から，前の段階の要素の電磁波パワーの増大分を差し引いて電子ビームの速度を求める。（4）上記（1）～（3）の操作を各要素について順番にz軸に沿って行う。従って，i番目の要素での電磁波パワーP_iは

$$P_i(z)=A_i\exp(2\alpha_i z), \tag{6.4}$$

である。一方，電子ビームのパワーP_bについては，x方向には単位長，y方向には有効幅Δ_{eff}の断面を単位時間に通過する，速度vで密度Nの電子ビームを考える。即ちこの断面を1秒間に通過する電子の数は$N\mathrm{v}\,\Delta_{eff}$であり，かつ電子1個あたりの運動エネルギーは式（2.13）で与えられるので，

$$P_b=(\gamma-1)\,m_0c^2N\mathrm{v}\Delta_{eff}=m_0c^3N\beta\Delta_{eff}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right),$$
$$\beta={}^{\mathrm{v}}\!/_{\mathrm{c}} \tag{6.5}$$

となる。y方向の電子ビーム幅Δが大きければ，式(6.5)での有効幅Δ_{eff}は節5で見たようにδとおくことができ，小さければΔがΔ_{eff}となる。また$z=0$での電子密度と速度をそれぞれN_0, v_0（またはβ_0）とするならば，任意のz位置でのそれらとの間には，ビームの連続性より

$$N\beta=N_0\beta_0 \tag{6.6}$$

が成り立つ。そしてi番目の要素内での電磁波パワーの増加量ΔP_iと，空間電荷波の負の増加量ΔQ_iの間には，式（6.3）の関係より

$$\Delta P_i+\Delta Q_i=0 \tag{6.7}$$

が成り立ち，このΔQ_iが電子ビームパワーの減少量ΔP_{bi}に相当する。従って，式（6.5）より

$$\Delta Q_i=\Delta P_{bi}=m_0c^3N_i\beta_i\Delta_{eff}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{i+1}^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}}\right] \tag{6.8}$$

である。ここに式（6.7）と式（6.8）より，次段の要素内の電子ビームエネルギーγ_{i+1}は式（6.6）の関係を用いて

$$\gamma_{i+1}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}}-\frac{\Delta P_i}{m_0c^3N_0\beta_0\Delta_{eff}} \tag{6.9}$$

が得られる。

以上の結果を下にして，電磁波と電子ビームの伝搬と共にチェレンコフ放射光がパワー成長していく過程を次の手順に従って求めることができる。

① 初期条件としての電磁波パワー$P_0(z_0)=A_0$（μw程度のノイズ），および電子のエネルギーγ_0を設定する。

② 初段階の要素内での電磁波成長率α_0を式（5.15）

に基づいて求める。

③ 式 (6.4) より，次段の要素との境界位置での電磁波パワーを求める。

$$P_1(z_1) = A_0 \exp[2\alpha_0 (z_1 - z_0)], \quad A_1 = P_1(z_1)$$

④ 初段の要素内での電磁波パワー増加量を求める。

$$\Delta P_0 = A_1 - A_0$$

⑤ 式 (6.9) より，次段の要素との境界位置での電子ビームエネルギー γ_1を求める。

⑥ 2段目の要素内の電磁波成長率 α_1を式 (5.15) に基づいて求める。

⑦ 式 (6.4) より，3段目の要素との境界位置での電磁波パワーを求める。

$$P_2(z_2) = A_1 \exp[2\alpha_1 (z_2 - z_1)], \quad A_2 = P_2(z_2)$$

⑧ 2段目の要素内での電磁波パワー増加量を求める。

$$\Delta P_1 = A_2 - A_1$$

⑨ 式 (6.9) より，次段の要素との境界位置での電子ビームエネルギー γ_2を求める。

以上の計算を逐次繰り返して各要素について行うことによって，電子のエネルギーがチェレンコフ放射光へと変換され，それがパワー成長していく過程を知ることができる。

7. まとめ

特別な部屋を要求しない通常の実験室ででも使用可能な小型 FEL として，電界放出電子ビーム源を用いたチェレンコフ FEL の開発研究を我々は科学研究費で進めている。そのためには，必要とする波長領域での誘電体の正確な誘電率を知る必要があり，その測定法については既に解説した[14)]。本稿では電子ビームが誘電体表面を伝搬するときに生じるチェレンコフ効果について，その原理を詳述した最近刊行の叢書を下に，その基本となる相対論の考え方をも付記しながら，我々の研究にも使用できるように解説した。

参考文献

1) 網脇恵章，大東延久，日本赤外線学会誌 2 (1992) 34.

2) H.Motz, J. Appl. Phys. 22 (1951) 527.

3) L.Elias, W.Fairbanks, J.Madey, H.Schwettman and T.Smith, Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 717.

4) D.Deacon, L.Elias, J.Madey, G.Ramian, H.Schwettman and T.Smith, Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 892.

5) 中井貞夫，粟津邦男，坪内夏朗，淺川 誠，部谷 学，今崎一夫，生産と技術 52 (2000) 8.

6) 網脇恵章，レーザー研究 15 (1987) 70.

7) C.A.Spindt, I.Brodie, L.Humphrey and E.R.Westerberg, J. Appl. Phys. 47 (1976) 5248.

8) H.Ishizuka, S.Kawasaki, H.Kudo, A.Watanabe and M.Shiho, Jpn. J. Appl. Phys. 35 (1996) 5471.

9) Y.Tsunawaki, Y.Tokura, M.Kusaba, N.Ohigashi, K.Mima, M. Fujita, K.Imasaki, S.Nakai and M.Shiho, Nucl. Instr. Meth. A429 (1999) 299.

10) Y.Tokura, Y.Tsunawaki, N.Ohigashi, S.Akita, Y.Nakayama, K.Imasaki, K.Mima and S.Nakai, Nucl. Instr. Meth. A475 (2001) 458.

11) C.N.Afanasiev, *Vavilov-Cherenkov and Synchrotron Radiation -Foundations and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004).

12) T.Shiozawa, *Classical Relativistic Electrodynamics -Theory of Light Emission and appliocation to Free Electron Lasers,* Springer-Verlag, Berlin (2004).

13) P.A.Cherenkov, Phys. Rev. 52 (1937) 378.

14) 網脇恵章，山本幸男，草場光博，淺川 誠，大阪産業大学論集 自然科学編 115 (2004) 39.