『九章算術』訳注†稿（15）

小　寺　　　裕、武　田　時　昌、張　替　俊　夫

中国古算書研究会

大川　俊隆、小寺　裕、角谷　常子、武田　時昌

田村　誠、馬場　理惠子、張替　俊夫、吉村　昌之

Translation and Annotation of "The Nine Chapters on the Mathematical Art（九章算術）" Vol. 15

KOTERA Hiroshi

TAKEDA Tokimasa

HARIKAE Toshio

Abstract

"The Nine Chapters on the Mathematical Art" was the oldest book of mathematics in China before the unearthing of "Suan-shu shu." The aim of our research is to provide a complete translation and annotation of it including annotations of Liu Hui（劉徽）and Li Chunfeng（李淳風）from the viewpoint of our previous work on "Suan-shu shu."

This is the fifteenth article based on our research and results in which we studied the problems 14 to 20 of Chapter 5, Shang gong（商功）.

『九章算術』は『算数書』出土以前は数学書としては中国最古のものであった。我々は、我々の『算数書』研究を起点に、『九章算術』の劉徽注、李淳風注を含めた訳注を完成さ

†This work was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 20500879, 25350388.
平成26年６月30日　原稿受理

せることを目的としている。

本論文では、商功章の算題 (14)～(20) に対する訳注を与える。

九章算術巻第五(続き)

[一四]今有壍堵、下廣二丈、袤一十八丈六尺、高二丈五尺。問積幾何。荅曰、四萬六千五百尺。

術曰、廣袤相乘、以高乘之、二而一[29]。

訓読：今、壍堵(57) 有り、下広二丈、袤一十八丈六尺、高二丈五尺。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、四万六千五百尺。

術に曰く、広袤相乗じ、高を以て之に乗じ、二にして一とす(58)。

注：(57)「壍堵」の形状は、斜面を有する塹壕、隄等において断面が直角三角形になるものであり、直方体を対向する 2 面の対角線を含む平面で 2 等分して得られる立体である。図 1 参照。直角三角形の底辺が下広になる (上広はなし)。したがって、その体積は、直方体の体積を 2 で割れば得られる。

なお張家山漢簡『算数書』では「塹堵」が現れるが、この『算数書』の塹堵の形は『九章算術』の壍堵とは異なっており、むしろ後題の「羨除」(図 5) の形と同じである。14) 参照。また岳麓書院蔵秦簡『数』においては「塹堵」は現れないが、「除」と称する直角三角柱が現れる。40) 参照。

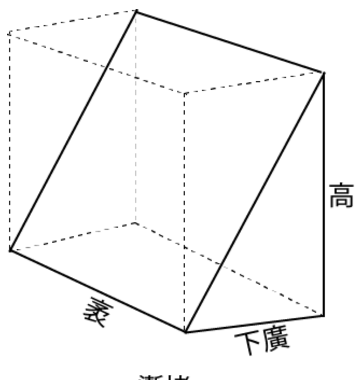

図 1

(58) ここでの計算は、次の通りである。

塹堵の体積＝下広20尺×袤186尺×高さ25尺÷2＝46500立方尺

訳：今、塹堵があり、下広２丈、袤18丈６尺、高さ２丈５尺である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、46500立方尺。

術にいう、下広、袤を掛け合わし、高さをこれに掛け、２で割る。

[29] [劉注] 邪解立方､得兩塹堵｡雖復隨方[一]､亦爲塹堵｡故二而一｡此則合所規(冪)〔棊〕[二]､推其物體、蓋爲塹上疊[三]也。其形如城、而無上廣。與所規棊、形異而同實。未聞所以名之爲塹堵之説也。

校訂：[一]「隨方」は、聚珍版、四庫本は「楕方」に作る。「隨」「楕」「橢」「隋」の諸字は通用するので、改める必要はない。

[二]南宋本は「冪」に作るが、郭書春本（銭宝琮の校勘）に従い、「棊」に改める。

[三]「疊」は、南宋本では「壘」に作る。

訓読：邪（なな）めに立方を解（さ）けば、両つの塹堵を得。復た橢方(59)と雖も、亦た塹堵と為る。故に二にして一とす。此れ則ち規とする所の棊(60)を合し、其の物の体を推せば、蓋し塹の上に疊（かさ）ぬと為す也(61)。其の形、城の如くして上広無し。規とする所の棊と、形異なりて実を同じくす。未だ之を名づけて塹堵と為す所以の説を聞かざる也。

注：(59)「隨（楕・橢）方」とは、直方体である。

(60)「規とする所の棊」とは、論証に用いている単位長（各辺１尺）の「棊」を指す。立方体を２分して得られる塹堵は３辺が等しくなるが、劉徽はその模型を用いながらも、３辺の長さが異なる場合の一般性を勘案しながら考察しようとしているのである。

(61) 塹堵の形状を、本章の前段にみえる「塹」（台形柱）の上広がなくなった立体として説明しようとする。図２のように、「塹」の上面に、上広を下広に縮小した「塹」を積み重ね、さらに同様にして「塹」を次々と重ね合わせてゆくと、次第に上広が微小になり、やがて上広のない塹堵が得られる。その場合、断面が直角三角形になるわけではないので、正規の立体とは形状が異なるが、体積は同じである。

訳：立方体を斜めに割ると、二つの塹堵が得られる。直方体であっても、また塹堵になる。だから（立方体や直方体の体積を）２で割ると塹堵の体積となる。規準とする模型を合わせて、その立体の構造を推し量ると、思うに塹堵は塹（台形柱）が上に積み重なったものである。塹堵の形は、上広がない城壁のようである。規準とする模型とは、形

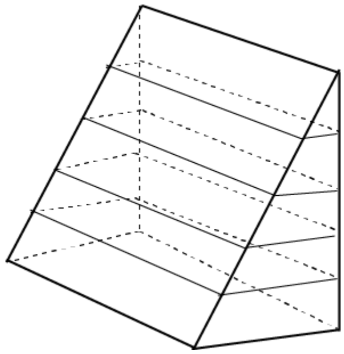

図２

状は異なっているが、体積は同じになる。これを壍堵と名づける理由を述べた説をまだ聞いたことがない。

[一五]今有陽馬、廣五尺、袤七尺、高八尺。問積幾何。荅曰、九十三尺少半尺。術曰、廣袤相乘、以高乘之、三而一[30]。

訓読：今、陽馬[62][63]有り、広五尺、袤七尺、高八尺。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、九十三尺少半尺。

術に曰う、広・袤相乗じ、高を以て之に乗じ、三にして一とす[64]。

注：(62) 壍堵を斜めに２分割すると、陽馬と（次條で扱う）鼈臑が得られる（図３参照）。また、劉徽注では、方錐を底辺の中点を通る垂直面で４等分した立体とする。それらの陽馬は、底面に２つの側面が直交する四角錐である。陽馬と鼈臑の体積比は２：１であるので、陽馬の体積は直方体の$\frac{1}{3}$倍、鼈臑は直方体の$\frac{1}{6}$倍になる。

(63)『算数書』では「陽馬」は現れない。また『数』では「陽馬」はないが、「錐」と呼ばれる四角錐の体積を求める公式が現れる。40）参照。

(64) ここでの計算は、次の通りである。

陽馬の体積＝広５尺×袤７尺×高８尺÷３＝$93\frac{1}{3}$立方尺

訳：今、陽馬があり、広５尺、袤７尺、高８尺である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、$93\frac{1}{3}$立方尺。

術にいう、広、袤を掛け合わせ、高さをこれに掛け、３で割る。

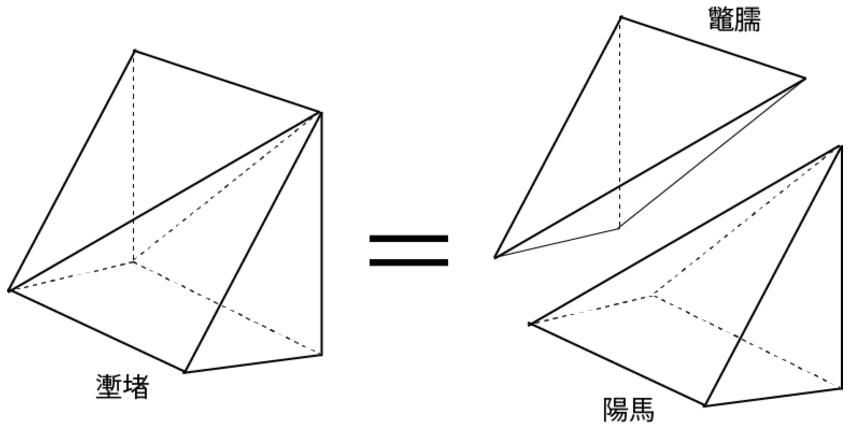

図３　塹堵の２分割による陽馬と鼈臑

[30][劉注]按、此術、陽馬之形、方錐一隅也。今謂四柱屋隅爲陽馬。假令廣·袤各一尺、高一尺、相乘之、得立方積一尺。邪解立方、得兩塹堵。邪解塹堵、其一爲陽馬、一爲鼈臑[一]。陽馬居二、鼈臑居一、不易之率也。合兩鼈臑、成一陽馬、合三陽馬、而成一立方。故三而一。驗之以棊、其形露矣。悉割陽馬、凡爲六鼈臑。觀其割分、則體勢互通、蓋易了也。

其棊或脩短、或廣狹、立方不等者、亦割分以爲六鼈臑、其形不悉相似。然見數同、積實均也。鼈臑殊形、陽馬異體。然陽馬異體、則不可純合。〔不〕[二]純合、則難爲之矣。何則、按邪解方棊、以爲塹堵者、必當以半爲分。邪解塹堵、以爲陽馬者、亦必當以半爲分。一從一横耳。設爲[三]陽馬爲分内、鼈臑爲分外、棊雖或隨脩短廣狹、猶有此分常率。知[四]殊形異體亦同也者、以此而已。

其使鼈臑廣·袤·(各高)〔高各〕[五]二尺、用塹堵·鼈臑之棊各二。皆用赤棊。又使陽馬之廣·袤·高各二尺、用立方之棊一、塹堵·陽馬之棊各二。皆用黑棊。棊之赤黑、接爲塹堵、廣·袤·高各二尺。於是中效[六]其廣·〔袤〕[七]、又中分其高、令赤黑塹堵各自適當一方、高(二)〔一〕尺、方(二)〔一〕尺[八]。每二分鼈臑、則一陽馬也。其餘兩端、各積本體、合成一方焉。是爲別種而方者、率居三、通其體而方者、率居一。雖方隨棊改、而固有常然之勢也。按、餘數具而可知者、有一、二分之別。卽一、二之爲率、定矣。其於理也、豈虛矣。

若爲數而窮之、置餘廣·袤·高之數各半之、則四分之三、又可知也。半之彌少、其餘彌細。至細曰微、微則無形。由是言之、安取餘哉。數而求窮之者、謂以情[九]推、不用籌算。

鼈臑之物、不同器用。陽馬之形、或隨脩短廣狹。然不有鼈臑、無以審陽馬之數、不有陽馬、無以知錐亭之類、功實之主也。

校訂：[一]「鼈臑」の「臑」は、聚珍版、四庫本は「臑」に作り、李籍の『音義』は「臑」

を「腝」に作るのは「是に非ず」とするが、両字は通用する。

[二]南宋本、楊輝本は「純合」の上に「不」字を欠く。郭書春の校勘（聚珍版、四庫本による）に従って補う。

[三]「設爲」の「爲」は、聚珍版、四庫本は「以」に作る。「設爲」「設以」は、「假令」と同じく仮定の詞であり、いずれでも通じる。

[四]郭書春は、「知」を「者」と訓じ、上文に連ねて解釈する。

[五]南宋本、楊輝本、大典本は、「各高」に作るが、郭書春の校勘（聚珍版、四庫本による）に従って倒置する。

[六]郭書春は、「效」は「攷」の誤りとする。注（69）を見よ。

[七]郭書春の校勘に従って「袤」字を補う。

[八]「高二尺､方二尺」の「二」は､郭書春の校勘に従って､いずれも「一」に改める。

[九]南宋本は、「情」を「精」に作るが、楊輝本、聚珍版、四庫本に従う。

訓読：按ずるに、此の術、陽馬の形は、方錐の一隅也[65]。今、四柱屋の隅を謂いて陽馬と為す[66]。仮に広・袤をして各々一尺、高一尺たらしむれば、之を相乗じて、立方積一尺を得。邪めに立方を解けば、両塹堵を得。邪めに塹堵を解けば、其の一は陽馬と為り、一は鼈臑と為る。陽馬は二に居り、鼈臑は一に居るは、不易の率也。両鼈臑を合すれば、一陽馬と成り、三陽馬を合すれば、而して一立方と成る。故に三にして一とす。之を験するに棊を以てすれば、其の形露わなり。悉く陽馬を割けば、凡そ六鼈臑と為る。其の割分を観れば、則ち体勢互いに通ずること、蓋し易了ならん[67]。

其の棊或いは脩短、或いは広狭にして、立方の等しからざる者は、亦た割分して以て六鼈臑と為せば、其の形悉くは相似ず。然れども見数同じくして、積実均しき也。鼈臑、形を殊にし、陽馬、体を異にす。然れども陽馬、体を異にすれば、則ち純合すべからず。純合せざれば、則ち之を為し難し。何となれば則ち、按ずるに、邪めに方棊を解き、以て塹堵と為せば、必ず当に半を以て分と為すべし。邪めに塹堵を解き、以て陽馬と為せば、亦必ず当に半を以て分と為すべし[68]。一従一横なるのみ。設為（もし）陽馬は分の内と為し、鼈臑は分の外と為せば、棊は或いは脩短、広狭に随うと雖も、猶お此の分に常率あるがごとし。形を殊にし体を異にするも亦同じきを知るは、此を以てするのみ。

其れ鼈臑をして広・袤・高各々二尺たらしむれば、塹堵・鼈臑の棊各々二を用う。皆赤棊を用う。又陽馬の広･袤･高をして各々二尺ならしむれば、立方の棊一、塹堵･陽馬の棊各々二を用う。皆黒棊を用う。棊の赤･黒接して塹堵と為せば､広･袤･高各々二尺たり。是に於て其の広・袤を中效[69]し、又其の高を中分し、赤黒の塹堵をして

各自一方に適当せしむれば、高一尺、方一尺たり(70)。二分の鼈臑ごとに、則ち一陽馬也(71)。其の余の両端、各々本体を積み、一方を合成す(72)。是れ別種と為りて方たる者、率として三に居り、其の体を通じて方たる者、率として一に居る(73)。方隨にして棊改むと雖も、固より常然の勢有る也(74)。按ずるに、余数具わりて知るべき者は、一、二分の別有り。即ち一、二の率たるや、定まれり。其れ理に於けるや、豈に虚ならんや。

若し数にして之を窮むるを為せば(75)、余の広・袤・高の数を置きて各々之を半にすれば、則ち四分の三、又知るべき也。之を半にすること弥々少く、其の余弥々細なり。至細なるを微と曰い、微なれば則ち形無し。是に由りて之を言えば、安くんぞ余を取らんや。数にして求めて之を窮むとは、情を以て推し、籌算を用いざるを謂う。

鼈臑の物は、器用を同じくせず。陽馬の形は、或いは脩短、広狭に随う。然れども鼈臑有らずんば、以て陽馬の数を審らかにする無く、陽馬有らずんば、以て錐亭の類を知る無し、功実の主たる也。

注：(65) ここの劉徽注では、陽馬の形状を説明するのに、方錐、立方体、塹堵の３種類の立体を用いる。方錐の場合には対角線で４分割すると、４つの陽馬になり、立方体の場合には１つの頂点からの対角線で３分割すると、３つの陽馬になる。また、立方体を２分割した塹堵をさらに対角線で２分すると、陽馬と鼈臑になり、それらの体積比は、2：1になる。３辺の長さが異なる直方体を分割した場合には、得られる陽馬は同じ形にはならない。また、陽馬を２分割すると、鼈臑が２つ得られるが、その形も同じではない。劉徽は、そのような立体の性質に留意しながら、陽馬と鼈臑の体積比について、棊を用いて検証しようとする。図４参照。

(66)「四柱屋」とは、大棟を中心に四方に軒を降ろした寄棟式の屋根とそれを支える４本の柱からなる建物、いわゆる四阿（あずまや）のことである。『周礼』考工記「匠人」に「殷人は重屋、堂の脩さ七尋、堂の崇さ三尺、四阿重屋なり」とあり、鄭注に「四阿は今の四柱屋の若し。重屋は複笮（二重の屋根じた）なり」とある。陽馬について、『文選』馬融「梁将軍西第賦」に「騰極は檐を受け、陽馬は楄を承く」、何晏「景福殿賦」に「爰に禁楄有り。勒分翼張し、承くるに陽馬を以てし、接するに圓･方を以てし、斑間白を賦き、疎密章有り」、張協「七命」に「陰虯（一本に「虬」に作る）は檐を負い、陽馬は阿を承く」とあるように、四阿の屋根から伸びる楄(垂木)を受ける建築部材を指して「陽馬」と称した。その部材の形状から算術用語としての「陽馬」が生まれてきたと考えられる。なお、建築用語としての「陽馬」は、宋代の李誡『営造法式』にも見える。

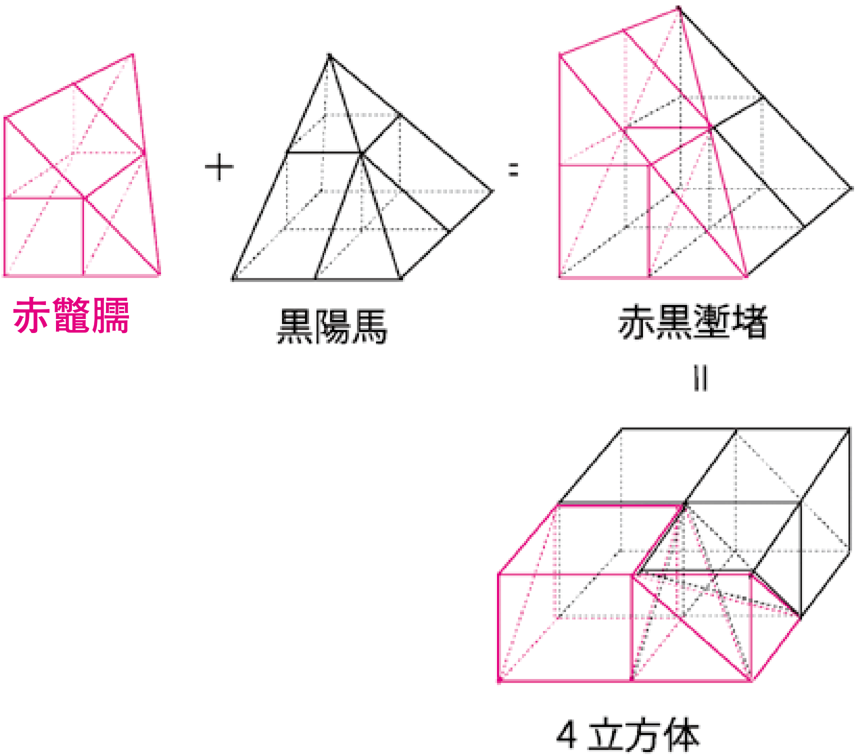

図4

(67)「易了」は、容易に了解できること。
(68) 直方体を分割して壍堵から陽馬と鼈臑を作る場合、切断の方向が違えば辺の長さが異なる形状の立体になるが、その分割の比率は常に2：1となることを述べたものである。「以爲陽馬者、亦必當以半爲分」の「半」は、厳密に言うと「太半」の意で理解すべきである。
(69)「中效其廣・袤」「中分其高」は、各辺の中点を通る垂直面と水平面で分割することである。「效」には「分」あるいは「切」と訓ずる用例は見当たらないが、文意からすると、直交する2平面で十字の形に分割することなので、「中分」とせずに「中效(交)」としているのかもしれない。郭書春は､「效」は「放」の誤りとする。
(70) 各辺2尺の壍堵(大壍堵)は、鼈臑(赤棊)と陽馬(黒棊)を組み合わせた立体である。その壍堵を各辺1尺になるように中分すると、赤黒の棊に分解される。そこで赤棊、黒棊の壍堵を2つ組み合わせて、長さ1尺の立方体を合成する。壍堵の棊は、赤黒各2個あるが、すべて同じ形であるので、どの棊を組み合わせてもかまわない。しかしながら、前文で議論しているように、直方体を分割して得られる壍堵

の場合には、縦向き、横向きによって、形が異なってくる。そこで、一般性を失わないようにするためには、同じ向きの塹堵同士を組み合わせなければならない。その場合には、赤棊と黒棊のペアになる。単に「合成」と言わずに、「各自適當」という表現になっているのは、そのような操作を念頭に置いているからである。

(71)「毎二分鼈臑、則一陽馬也」の「二分鼈臑」とは、鼈臑の２分の１個分を指すと思われる。前後の文脈において、直前では塹堵を組み合わせて立方体２個を作り、直後の「其餘両端」以下では残余の鼈臑と陽馬から立方体１個を合成する。この他に、陽馬の黒棊には、もともと立方体が１個ある。つまり、大塹堵を分割すると、４個の立方体が得られる。そこから、塹堵を分割した陽馬（黒棊）と鼈臑（赤棊）の体積比が２：１であることを証明しようとする。したがって、ここでは残余を合成した立方体を除く３個の立方体に論及したものである。すなわち、３個の立方体における黒棊と赤棊の体積率は、黒棊：赤棊＝（立方体１個＋塹堵２個）:（塹堵２個）であり、立方体１個＝塹堵２個より、２：１の比率が導き出せる。後文では、その比率を「一、二分之別」としている。つまり、「二分鼈臑」とは、赤棊（鼈臑）の２分の１個分を指しており、（３個の立方体における黒棊と赤棊は）一陽馬に対して「二分鼈臑」となる比率（$1:\dfrac{1}{2}=2:1$）で必ず分割されることを論じたものである。

(72) 大塹堵から３個の立方体を取り去ると、両端には、赤棊の鼈臑と黒棊の陽馬とが1組ずつ残っている。それらは互いに重なり合い、小塹堵になっている。そこで、そのままの形（＝「本体」）で２組の小塹堵を積み重ねて、立方体を合成する。

(73)「別種」とは黒棊と赤棊を区別したもの、「其の体を通じて方たる者」は立方体を指すと解釈できなくはない。しかし、前後の文脈から判断すると、残余の小塹堵は、大塹堵と同じく陽馬と鼈臑からなるので「同種」とし、それ以外の立体（塹堵、立方体）の組み合わせを「別種」として区別したものと解釈すべきである。注（71）で説明したように、別種の立体から得られる３個の立方体には、陽馬の黒棊と鼈臑の赤棊に２：１の分割比が見出せる。残余を合成して得られる１個の立方体は、陽馬と鼈臑からなる「同種」の組み合わせなので、両者の分割比を直接は導けない。しかし、不明の部分は、大塹堵の４分の１に縮小化される。後文に「四分之三、又可知也」とあるのは、そのことを指す。したがって、「率として三に居る」と言う「別種」からなる立方体は、残余を除く立体のほうであることがわかる。

(74) もとの立方体が３辺の長さが異なる直方体であっても、分割して得られる棊の形が不均整になるだけで、全体的な形勢に変わりはなく、分割比の一般性は失われない。だから、「常然の勢い」があるとする。

(75) 以下の劉徽注では、無限分割の手法を用いて、数学的に証明しようとする。すなわち、４分の１の立方体（８分の１の小壍堵２個）を同様に分割し、(分割比が既知である）４分の３と残余に分け、さらに残余の細分化を繰り返す。すると、残余は等比級数的に微細になっていき、やがて無形の「微」に至る。そこで、残余の部分は無視できるようになるので、既知の分割比の総和から２：１の比率が導けると考える。無限分割の極小概念を用いた論証は、巻１、方田章の割円術、巻４、少広章の開方術の劉徽注にも見ることができる。

訳：按ずるに、此の術において、陽馬の形状は、方錐の（４分割した）一隅である。今日では、四注屋（あずまや）の一隅（垂木を受ける部分）を陽馬と呼ぶ。かりに広・袤各１尺、高２尺とした場合、それぞれを掛け合わせると、立方体の体積１立方尺が得られる。立方体を斜めに切断すると、２個の壍堵が得られる。斜めに壍堵を切断すると、１つは陽馬となり、１つは鼈臑となる。その体積比は、陽馬が２、鼈臑が１である。それは、不変の比率である。２個の鼈臑を合わせると、陽馬が１個できる。３個の陽馬を合わせると、立方体が１個できる。だから３で割る。このことを検証するのに棊を用いると、その形ははっきりと明示できる。（３個の）陽馬をすべて分割すると、全部で６個の鼈臑となる。その分割した部分を観察するならば、それらの構造が相互に共通していることが、おそらく容易に了解できるだろう。

その棊に長短があったり、広狭があったりして、(組み合わせてできる）立方体の辺の長さが等しくならない場合（＝直方体になる場合）でも、部分に分割して６個の鼈臑になるが、その形状はすべて似るとは限らない。そうであっても、(各辺の長さの）現れた数は同じであり、実質（体積）は均しい。鼈臑が異なる形状であれば、(それを２つ合わせた）陽馬は異なる形体になる。ところが、陽馬が異なる形体であれば、ぴったりと組み合わせることができない。ぴったりと組み合わなければ、検証することは困難である。どうしてそのようになるかというと、按ずるに、方形の棊を斜めに切断して壍堵を作ると、(形の大小にかかわらず）必ず半分が分割比になる。壍堵を斜めに切断して陽馬を作ると、同様に必ず大半（３分の２）が分割比となる。(切断する向きによって）縦向きになったり、横向きになったりするだけである。もし陽馬を分割した部分の内側とし、鼈臑を分割した部分の外側とすると、棊には長短があったり、広狭があったりするが、内外の分かれ方にはやはり恒常的な比率がある。異なる形体でも体積が同じであることがわかるのは、これによるのである。鼈臑の広・袤・高さを各２尺とするならば、壍堵と鼈臑の棊がそれぞれ２個ずつ必要である。それらにすべて赤色の棊を用いる。また陽馬の広・袤・高さを各２尺とするならば、立方の棊が

１個、壍堵・陽馬の棊がそれぞれ２個ずつ必要である。それらすべてに黒色の棊を用いる。棊の赤と黒を接合して、広・袤・高さが各２尺の壍堵にする。そこで、広・袤を（垂直面で十字に）中分し、また高さを（水平面で）中分する。赤黒の壍堵をそれぞれほどよく組み合わせて、高１尺、方１尺の立方体にする。（残余を除いて得られた３個の立方体における赤棊と黒棊の比率は）、鼈臑（赤棊）の２分の１個分が、陽馬（黒棊）の１個分になる。両端にある残余の棊は、そのままの形を積み重ねて、１つの立方体を合成する。（陽馬と鼈臑の）別種の立体による立方体が、率として３個分あり、それら（陽馬と鼈臑）の形を用いた立方体が、率として１個分ある。立方体が直方体（楕方）になり、棊が改変されたとしても、もとより恒常的な形勢がある。按ずるに、残余の数がまだあるのにもかかわらず（その比率を）知ることのできるのは、「一、二分の区別」（陽馬が１、鼈臑が２分の１となる区別）がそこにあるからである。そこで、（陽馬と鼈臑の体積比として）２対１の比率が定まるのである。道理においてどうして虚妄であろうか。

もし数によってそれを究めようとするならば、（体積が４分の１になった）残余の広･袤･高の数を置算し、それぞれ半分にすれば、（全体の）４分の３は、同様に（「一、二分之別」があることを）知ることができる。さらに残余を半分にしていくとますます少なくなり、残余はますます細小になっていく。限りなく細小であることを「微」（＝極微）と称する。「微」であるならば、無形である。それによって言えば、どうして（極微となった）残余を取る必要があろうか。数によって尋ね究めるとは、実情によって推し量り、算木による計算を用いないことを言う。

鼈臑の形をした物は、（形が均一ではなく）用途が異なっている。陽馬の形には、辺の長短、広狭によって違う場合がある。そうであるけれども、鼈臑がなければ、陽馬の数理を明らかにすることができず、陽馬がなければ、方錐、方亭の類を知ることができない。（鼈臑、陽馬は）功程や積実（仕事量や体積）の大本である。

[一六]今有鼈臑、下廣五尺、無袤、上袤四尺、無廣、高七尺。問積幾何。荅曰、二十三尺少半尺。術曰、廣袤相乘、以高乘之、六而一[31]。

訓読：今、鼈臑有り(76)、下広五尺、袤無く、上袤四尺、広無く、高七尺。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、二十三尺少半尺。

術に曰う、広袤相乗じ、高を以て之に乗じ、六にして一とす(77)。

注：(76)「鼈臑」の形状については、注(62)を参照。なお『算数書』、『数』では共に鼈臑は現れない。

(77) ここでの計算は、次の通りである。

鼈臑の体積＝下広５尺×上袤４尺×高７尺÷６＝$23\frac{1}{3}$立方尺

訳：今、鼈臑が有り、下広５尺、下袤無く、上袤４尺、上広無く、高さ7尺である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、$23\frac{1}{3}$立方尺。

術にいう、下広、上袤を掛け合わせ、高さをこれに掛け、６で割る。

[31] **[劉注]按、此術、臑者臂骨**[一]**也。或曰、半陽馬、其形有似鼈肘、故以名云。中破陽馬、得兩鼈臑。〔鼈臑〕之**[二]**見數、卽陽馬之半數。數同而實據半。故云、六而一、卽得。**

校訂：[一]「臑者、臂骨也」は、聚珍版、四庫本は「臑者、背節也」に作る。「臑」は、『玉篇』『広韻』等では「臂節」と訓ずる。李籍の音義では、「鼈臑、那到切。臂節也。鼈臑之積、半陽馬、其形有似鼈肘、故以名云」と述べ、「臑」を「臂節」と訓じ、さらに「臑、或いは臑に作るは是に非ず」と言う。ところが、『集韻』では「臑」を「肱骨」と訓じ、『史記』亀策伝には、龜の前足の骨を指して「前足臑骨」とする用例があるので、劉徽注の「臂骨」はそのままでも不都合はない。

「臑」「臑」の二字については、『説文』では、「臑」は「骨まじりのしおから」(「有骨醢」)、「臑」は「臂の羊矢」とする。段玉裁によれば、人の腕には「臂」と言い、羊豕の前足には「臑」と言う区別立てがある。「羊矢」は羊の糞であり、前足の「節」(関節)あるいは「肘」を喩える。その原義に従えば、「鼈臑」と表記したほうがいいかもしれない。しかし、「臑」「臑」の二字は通用するので、ここでは、南宋本の原文に従っておく。

[二]四庫本には、「之」字の上に「鼈臑」の二字があるのに従って補う。

訓読：按ずるに、此の術、臑とは臂の骨なり。或いは曰う、陽馬を半にすれば、其の形、鼈の肘に似る有り、故に以て名づて云う、と。陽馬を中破すれば、両鼈臑を得。鼈臑の見数は、卽ち陽馬の半数なり。数同くして実半に拠る、故に「六にして一とすれば、卽ち得」と云う。

訳：思うに、この術において、臑とは臂(腕)の骨である。あるいはいう、陽馬を二分すると、其の形状は鼈(スッポン)の肘に似ていて、だからそう名づけたのである。真ん中で陽馬を割ると、二つの鼈臑が得られる。鼈臑の現れた数は、すなわち陽馬の半数である。各辺の長さの数は(陽馬と)同じで、体積は(陽馬の)半分を占める。だから「６

で割ると（鼈臑の体積が）得られる」という。

[一七]今有羨除、下廣六尺、上廣一丈、深三尺、末廣八尺、無深、袤七尺。問積幾何。荅曰、八十四尺。
術曰、幷三廣、以深乘之、又以袤乘之、六而一[32]。

訓読：今、羨除[78][79]有り、下広六尺、上広一丈、深三尺、末広八尺、深無く、袤七尺。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、八十四尺。
術に曰う、三広を并せ、深を以て之に乗じ、又袤を以て之に乗じ、六にして一とす[80]。

注：(78)「羨除」とは、墓室に棺を納めるための斜めの通路（墓道）を言う。「羨除」について、李籍の音義に「羨、延也。除、道也。羨除乃隧道也」とある。「末広」は地上の入り口の幅、「上広」「下広」は墓室の入り口の天井と床の幅、「袤」は通路の水平面での長さ（末広と上広の距離）である。ここでは、通路の幅は、３辺とも長さが同じでない（上広＞末広＞下広）。その形状は、くさび形をした５面体で、上面、墓道の床面、墓室の入り口の面は台形で、左右の側壁は地面に対して斜立する三角形である。墓道は、奥に行くにつれて上面は次第に広がり、床面は逆にすぼまっている。図５参照。

(79)『算数書』にも、「美（羨）除」が見られる。ただし、その墓道の形状は、「除」と呼ばれる下広、上広と末広の３辺が等しいスロープ（『九章算術』の壍堵（直角三角柱）と同じ形状）と「定」と呼ばれる墓室に至る水平の通路（直方体）を合体させた図形となっている。14）参照。また、『数』ではやはり「除」と呼ばれる直角三角柱が見える。また、『数』には「塹堵」（壍堵）も見えるが、下広が上広・末広より長い立体になっている。『九章算術』の壍堵は上広、下広、末広３辺の長さが等しい直角三角柱であり、『算数書』の「塹堵」は本題における「羨除」に相当する。ここでは、さらに３辺がすべて等しくない一般形に拡張している。

(80) ここでの計算は次の通りである。
羨除の体積＝（下広６尺＋上広10尺＋末広８尺）×深さ３尺×袤７尺÷６＝84立方尺
この公式は、下広、上広、末広の３辺の平均値を求めて、前問の壍堵（三角柱）の公式に代入したとしても得られる。ただし、術文では、３辺の平均を求めるのではなく、「先乗後除」の式変形を行い、深さと袤を掛けた後で壍堵の法２と３の積６で割る。そこで、劉徽注では別の数理的証明を行っている。

羡除

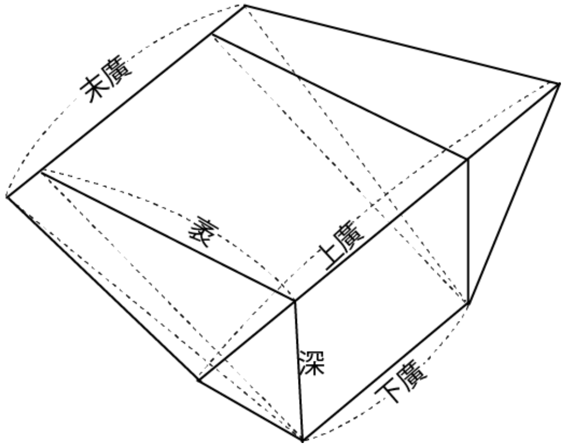

図5

訳：今、羡除があり、（一端の側面が）下広6尺、上広1丈、深さ3尺、（他端の側面が）末広8尺、深さがなく、袤7尺である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、84立方尺。

術にいう、3つの広を加えあわせ、深さをこれに掛け、また袤をこれに掛け、6で割る。

[32]［劉注］**按、此術、羡除、實隧道也[一]。其所穿地、上平下邪、似兩鼈腝夾一塹堵、卽羡除之形。假令用此棊、上廣三尺、深一尺、下廣一尺、末廣一尺、無深、袤一尺、下廣・〔末廣〕[二]皆塹堵。（之）〔上〕[三]廣者、兩鼈腝與一塹堵相連之廣也。以深・袤乘、得積五尺。鼈腝居二、塹堵居三。其於本棊、皆一爲六。故六而一。**

合四陽馬、以爲方錐。邪（盡）〔畫〕[四]方錐之底、亦令爲中方。就中方削而上合、全爲中方錐之半。於是陽馬之棊悉中解矣。中錐離而爲四鼈腝焉。故外錐之半、亦爲四鼈腝。雖背正異形、與常所謂鼈腝參不相似、實則同也。所云夾塹堵者、中錐之鼈腝也。

凡塹堵上袤短者、〔連〕[五]陽馬也。下袤短者、與鼈腝連也。（下）兩袤相等（知）〔短者〕[六]、亦與鼈腝連也。幷三廣、以高・袤乘、六而一、皆其積也。今此羡除之廣、卽塹堵之袤也。按此本是三廣不等、卽與鼈腝連者。別而言之、中央塹堵、廣六尺、高三尺、袤七尺。末廣之兩旁、各一小鼈腝、皆與塹堵等。令小鼈腝居裏、大鼈腝居表。則大鼈腝出隨[七]（皆）[八]

方錐、下廣（三）〔二〕尺[九]、袤六尺、高七尺。分取其半、則爲袤三尺。以高・廣乘之、三而一、卽半錐之積也。邪解半錐、得此兩大鼈腝、求其積亦當六而一、合於常率矣。按、陽馬之棊、兩邪棊底方、當其方也。不問旁角而割之、相半可知也。推此上連、無成不方。故方錐與陽馬同實。角而割之者、相半之勢。此大小鼈腝、可知更相表裏、但體有背正也。

校訂：［一］南宋本は、「隧」を「遂」に作る。「隧」と「遂」は通用する。

［二］李潢の校勘に従って「末廣」二字を補う。

［三］「之廣者」の「之」字は、四庫本、聚珍版では「上」字に作る。今、それに従う。

［四］「盡」は聚珍版、四庫本では「晝」に作る。今、それに従う。

［五］「陽馬」は聚珍版、四庫本には「連陽馬」に作るが、直後の書式に従って「與陽馬連」に改める。

［六］「下兩袤相等知」は、郭書春は「下」を「上下」とし、「知」を「者」と訓ずる。それでも文意は通じにくいので、「兩袤相等短者」もしくは「上下兩袤相等短者」と訂正すべきであるように思われる。

［七］「隨方錐」は「橢方錐」に通ずる。

［八］南宋本は「皆」字が「方錐」の上にあり、郭書春は「出」字の上に移すが、衍字とすべきである。

［九］「三尺」は郭書春の校勘に従って、「二尺」に改める。

訓読：按ずるに、此の術、羨除とは、実は隧道也。其の穿つ所の地、上平下邪にして、両鼈腝の一壍堵を夾むが似(ごと)きは、卽ち羨除の形なり(81)。仮令に此の棊、上広三尺、深一尺、下広一尺、末広一尺、深無く、袤一尺なるを用うれば(82)、下広・末広は皆壍堵なり。上広なる者は、両鼈腝と一壍堵との相連ぬるの広也。深・袤を以て乗ずれば、積五尺を得。鼈腝は二に居り、壍堵は三に居る、其れ本の棊に於いて、皆一にして六と為す。故に六にして一とす(83)。

四陽馬を合して、以て方錐と為す。邪(ななめ)に方錐の底に画き、亦た中方を為らしむ。中方に就いて削りて上合すれば、全て中方錐の半(84)と為る。是に於いて陽馬の棊悉く中解すれば、中錐離れて四鼈腝と為る。故に外錐の半は、亦た四鼈腝と為る。正に背き形を異にし、常の謂う所の鼈腝と参じて相似ざると雖も、実は則ち同じきなり。云う所の壍堵を夾むと云う所の者は、中錐の鼈腝也。

凡そ壍堵、上袤短き者は、陽馬と連ぬる也。下袤短き者は、鼈腝と連ぬる也。上下兩袤相等しき知（者）は、亦た鼈腝と連ぬる也(85)。三広を并せ、高・袤を以て乗じ、六にして一とすれば、皆其の積也。今、此の羨除の広は、卽ち壍堵の袤也(86)。按ずるに、此の本是れ三広等しからざれば、卽ち鼈腝と連ぬる者なり。別ちて之を言えば、中央

の壍堵、広六尺、高さ三尺、袤七尺なり。末広の両旁に、各々一小鼈腝あり、皆壍堵と等し。小鼈腝をして裏に居らしめ、大鼈腝をして表に居らしむ。則ち大鼈腝は皆随方錐より出ず。下広二尺、袤六尺、高さ七尺なり(87)。分ちて其の半を取れば、則ち袤三尺と為る。高さ・広を以て之に乗じ、三にして一とすれば、即ち半錐の積也。邪に半錐を解けば、此の両大鼈腝を得。其の積を求めんとすれば、亦た当に六にして一とし、常率に合すべし。按ずるに、陽馬の棊、両邪の棊の底方は、其の方に当たる也。旁・角を問わず之を割けば、相半ばすること知るべき也。此の上に連ぬるを推せば、成るとして方ならざる無し。故に方錐は陽馬と実を同じくす(88)。角にして之を割く者は、相半ばするの勢あり。此の大小の鼈腝は、更ごも相表裏し、但だ体に正に背むくこと有るのみなるを知るべき也。

注：(81) 下広の両端から上広に垂線を立て、上広との交点をA、Bとする。A、Bと下広、末広の両端を結んだ左右の２平面で羨除を切断すると、壍堵とそれを夾んだ左右の鼈腝に分けられる。ただし、下広と末広の長さが同じでないので、ここでの壍堵は直方体を２分したものではなく、底面が台形の四角柱を２分した立体になる。同様に、左右の鼈腝も、垂直に交わる平面がなく、頂点が歪んだ立体になる。「似」とあるのはそのためである。劉徽注の後半部（「凡壍堵」以下）では、羨除を分割してできる立体について、さらに詳しい考察を繰り広げる。図６参照。

(82) 羨除の体積公式について、まず各辺１尺となる基本形の壍堵と左右の鼈腝を組み合わせた模型（棊）を用いて証明しようとする。

(83) 羨除の体積公式は、術文では、上広、下広、末広を加えあわせた後で、深さ、袤を掛けて６で割る。ここでは、上広、下広、末広それぞれに深さ、袤を掛け、その後に加えあわせて、積数５立方尺を導き出す。

（上広３尺×深さ１尺×袤１尺）＋（下広１尺×深さ１尺×袤１尺）＋（末広１尺×深さ１尺×袤１尺）＝５立方尺

この式の各項は、上広、下広、末広のそれぞれを１辺とし、深さ１尺、袤１尺とする直方体あるいは立方体の体積である。下広１尺、末広１尺は、壍堵の辺である。また、上広３尺のうち、真ん中の１尺は壍堵、左右の１尺は鼈腝の各辺である。したがって、積数５立方尺のうち、３立方尺は壍堵から導き出されたものであり、残りの２立方尺は左右の鼈腝から導き出されたものである。１立方尺の立方体は、基本形の壍堵が２個分、鼈腝が６個分なので、３立方尺は壍堵が６個分、２立方尺は左右の鼈腝が各６個分になる。したがって、積数５立方尺を６で割ると、壍堵１個、左右の鼈腝各１個からなる羨除の体積が得られる。

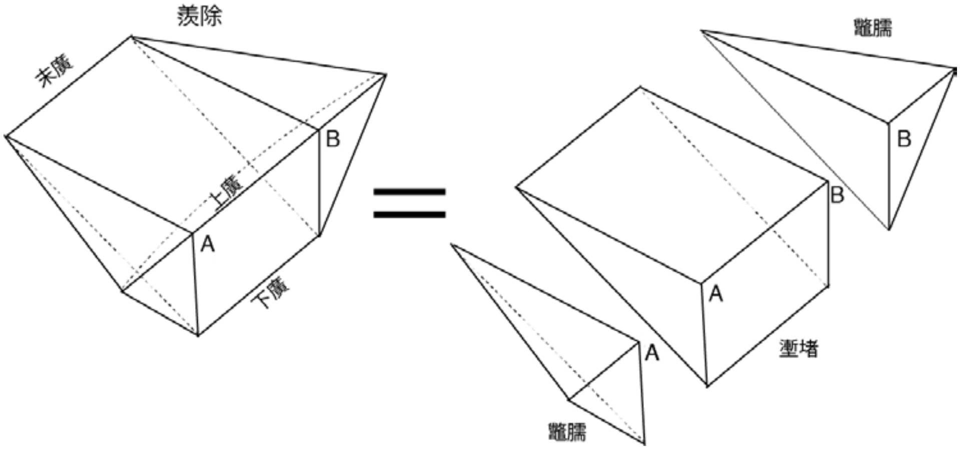

図６

(84)「中方錐之半」「外錐之半」の「半」は、郭書春は「片」（半片）と解する。４つの陽馬を合せた大方錐を、底面の隣り合う２辺の中点を結んだ中線と頂点を通る４つの垂直面で切断すると、真ん中には、大方錐を半分にした小方錐ができ、その外側には４つの鼈腝ができる。「中方錐」「外錐」とは、それらの立体を指している。それぞれの総体積が大方錐の半分になる立体なので、「半」と言ったとも考えることができる。

(85) 羨除の上広、下広、末広の３辺の長さが同じでないが、３辺とも等しい場合には塹堵になる。そこで、上広、下広がそれぞれ短くなる場合を考えると、塹堵の左右に陽馬もしくは鼈腝が連なった立体になる。塹堵では、断面の直角三角形の底辺を「広」、斜面の方向を「袤」とするので、羨除の上広、下広が塹堵の上袤、下広に対応する。すなわち、塹堵の末袤（羨除の末広）を一定とし、

（ⅰ）上袤が短い場合（末袤＝下袤＞上袤）

（ⅱ）下袤が短い場合（末袤＝上袤＞下袤）

（ⅲ）上下両袤がともに短い場合（末袤＞上袤＝下袤）

に分けて考える。なお、本題は、上袤＞末袤＞下袤となる場合であるが、上袤、下袤が長くなる場合または３辺の長さが異なる場合は省略して列挙しない。ただし、後文に「三廣不等、即與鼈腝連」とあり、３辺の長さが異なる場合も同様に考えていたことがわかる。

(86)「羨除の広は、即ち塹堵の袤」とは図７のように、羨除では広に当たる部分が、

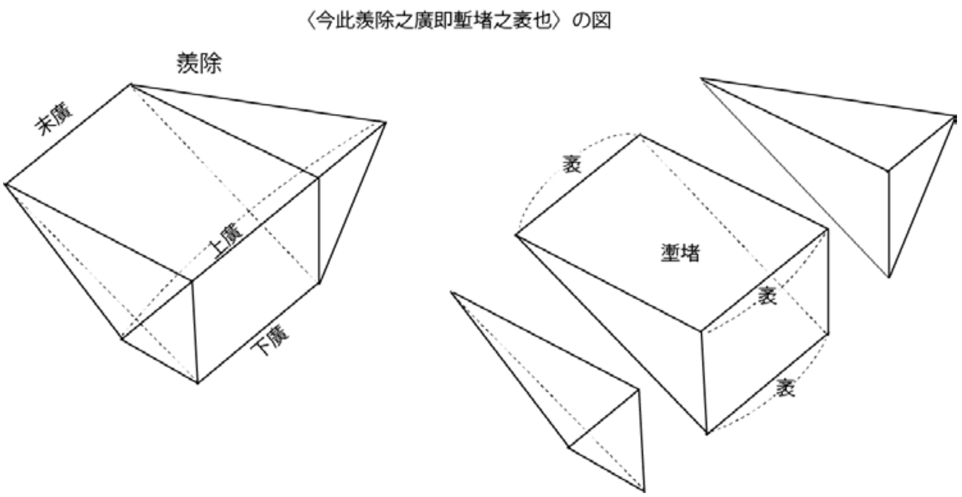

図７

塹堵では袤に当たることをいう。

(87) 方錐の高さ７尺は、羨除の袤に対応する。下広２尺は、羨除の下広と上広の差の半分、すなわち、塹堵から左右にはみ出た大鼈臑の辺の長さである。袤６尺は、楕方錐から陽馬を作りだすために、折半して深３尺になるように設定した数値である。

(88) 底面を共有する陽馬と方錐が、頂点の位置が異なるために形状は異なるが、体積が同じになることを、同じ高さの水平面における断面が同じ長方形になることに着眼して証明しようとしている。

訳：按ずるに、此の術において、羨除とは、実は隧道（墓道）である。穴を掘った空間は、上面は水平で下面は斜めになっており、２つの鼈臑が１つの塹堵を夾んだような形になる。すなわち、それが羨除の形状である。例えば、棊を用いて、上広３尺、深１尺、下広１尺、末広１尺、深さがなく、袤１尺である羨除とした場合、（羨除の）下広、末広はどちらの塹堵の広であり、（羨除の）上広は（左右にある）２つの鼈臑の辺と（真ん中にある）１つの塹堵の辺を連結した広になる。（上広、下広、末広それぞれに）深さと袤を掛けると、全部で５立方尺の体積量が得られる。鼈臑によるものが２、塹堵によるものが３の割合からなる。それはもとの棊（鼈臑を構成する左右の鼈臑と中央の塹堵）において、各１個に対して６つ分ある。だから、６で割る。

４つの陽馬を合せて方錐を作り、（邪に方錐の底面に画いて、亦た中央に正方形（「中方」）を作る。中央の正方形についてだんだん削って上で合せると、全部で中央の方

錐（「中方錐」）の半片が出来上がる。そこで、陽馬の棊をすべて分離すれば、中央の方錐は離れて４つの鼈臑となる。そこで、方錐の外側の半片は、また４つの鼈臑となる。それらは、正規の姿に背いて異なる形をしており、常に言うところの鼈臑に比べて似ていないが、実は同じものである。前述した壍堵を夾むものとは、中央の方錐からできる鼈臑に他ならない。

およそ壍堵において、上袤が短い場合には、（壍堵の左右に）陽馬を連ねたものになる。下袤が短い場合には、（壍堵の左右に）鼈臑を連ねる。上下両袤が等しく短い場合には、また（壍堵の左右に）鼈臑を連ねる。（羨除の）３つの広を加え合わせ、高と袤を乗じ、６で割ると、いずれもその体積になる。今、ここの羨除の広が、すなわち壍堵の袤に対応する。その体積を求めるには、６で割って、常率に合致させるべきである。

按ずるに、ここでは元々３つの広の長さが等しくないので、すなわち鼈臑と連なる場合である。別けて言えば、中央の壍堵は広６尺、高さ３尺、袤７尺である。末広の両旁に、それぞれ１つずつ小鼈臑があり、いずれも（高さ３尺と袤７尺は）壍堵と同じである。小鼈臑を内側に置き、大鼈臑を外側に置く。すなわち大鼈臑は長方形を底面とする四角錐から作り出せる。その四角錐は、下広２尺、袤６尺、高さ７尺である。それを（頂点と袤の中点を通る垂直面で）２分してその半分を取れば、すなわち袤は３尺となる。高さと下広をそれに掛け、3でわると、すなわち（四角錐を半分にした）半錐の体積である。斜めに半錐を裂くと、ここの２つの大鼈臑が得られる。

按ずるに、陽馬の棊において、２つの斜めに割った棊の四角形の底面は、陽馬の四角形に相当する。辺の中点でも角（頂点）を結ぶ対角線でもどちらでも、それを2分割すると、半分になることがわかる。この底面の上に連なった立体の形状を推し量ると、（水平面の断面は）四角形以外にならないことはない。だから方錐は陽馬と（頂点の位置はずれているが）実質は同じである。角を結んだ平面で分割すると、半分になる形勢が窺える。ここの大小の鼈臑は、互いに表裏関係にあり、ただ形体が正規の形に背いているだけであることがわかるのである。

[一八]今有芻甍、下廣三丈、袤四丈、上袤二丈、無廣、高一丈。問積幾何。荅曰、五千尺。術曰、倍下袤、上袤從之、以廣乘之、又以高乘之、六而一[33]。

訓読：今、芻甍[(89)]有り。下広三丈、袤四丈、上袤二丈、広無く、高一丈。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、五千尺。

術に曰う、下袤を倍し、上袤之に従い、広を以て之に乗じ、又高を以て之に乗じ、六にして一とす(90)。

注：(89)「芻甍」は、刈草で作った屋根の意で、ここでの形状は4方向に勾配を持つ寄棟造の屋根である（図8参照）。底面は長方形で、側面は三角形と等脚台形の各2個を斜めに組み合わせて上面が直線になる（上広がない）形状になる。

なお、『算数書』、『数』においては芻甍は見られない。

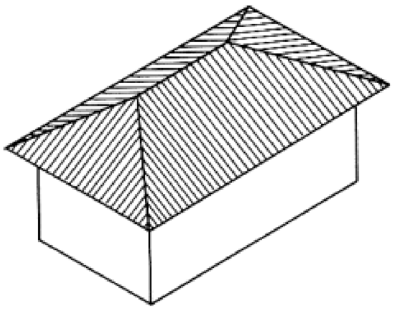

図8

(90) 上袤 b_1、下袤 b_2、下広 a 尺、高さ h とすると、体積公式$V=\frac{(b_1+2b_2)\,ah}{6}$。前問と同様にして上下3袤の平均値を考えると、ここでは下袤2辺は同じ長さなので2倍して上袤を加えて b_1+2b_2 とし、それを3で割れば得られる。そこで、袤$\frac{b_1+2b_2}{3}$として壍堵（三角柱）の公式に当てはめ、先乗後除の式変形を行うと、芻甍の体積公式が導ける。

ここでの計算は以下の通りである。

芻甍の体積＝（下袤40尺×2＋上袤20尺）×下広30尺×高さ10尺÷6＝5000立方尺

訳：今、芻甍があり、下広3丈、下袤4丈、上袤2丈、上広がなく、高1丈である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、5000立方尺。

術にいう、下袤を2倍し、上袤を加え、下広を掛け、さらに高さを掛け、6で割る。

[33] [劉注] **推明義理者、舊説云、凡積芻甍有上下廣曰童、甍謂其屋蓋之茨[一]也。是故甍之下廣·袤與童之上廣·袤等。正斬[二]方亭兩邊、合之、即芻甍之形也。假令下廣二尺、袤三尺、上袤一尺、無廣、高一尺。其用棊也、中央壍堵二、兩端陽馬各二。倍下袤、上袤從之、爲七尺。以(高)[三]廣乘之、得冪十四尺、陽馬之冪各居(一)〔二〕[四]、壍堵之冪各居三。以高乘之、**

得積十四尺。其於本棊也、皆一而爲六。故六而一卽得。亦可令上下袤差乘廣、以高乘之、三而一、卽四陽馬也。下廣乘上袤、而半之、高乘之、卽二塹堵。幷之、以爲甍積也。

校訂：［一］「茨」は、四庫本では「苫」に作るが、南宋本に従う。

［二］「斬」は、四庫本では「解」に作るが、南宋本に従う。

［三］「高」は、李潢の校勘に従い、衍字とする。

［四］「一」は、李潢の校勘に従い、「二」の誤りとする。

訓読：義理を推明すれば、旧説に云う、凡そ積芻の甍に上下の広有るを童(91)と曰い、甍とは其の屋蓋の茨を謂う也。是の故に甍の下広・袤は、童の上広・袤と等し(92)。正に方亭の両辺を斬りて之を合すれば、卽ち芻甍の形也(93)。

假令に下広二尺、袤三尺、上袤一尺、広無く、高一尺とすれば、其の棊を用うるや、中央に塹堵二、両端に陽馬各二なり(94)。下袤を倍し、上袤は之に従うれば、七尺と為る。広を以て之に乗ずれば、冪十四尺を得。陽馬の冪各二に居り、塹堵の冪各三に居る。高を以て之に乗ずれば、積十四尺を得。其れ本の棊に於けるや、皆一にして六と為す。故に六にして一とすれば卽ち得。

亦た上下袤の差をして広に乗ぜしめ、高を以て之に乗じ、三にして一とすれば、卽ち四陽馬なるべき也。下広もて上袤に乗じ、而して之を半にし、高もて之に乗ずれば、卽ち二塹堵なり。之を并すれば、以て甍の積と為る也(95)。

注：(91)「童」とは、次題で扱う「芻童」のことで、芻甍で上広のある場合、すなわち四角錐台である。

(92) 大芻甍を水平面で切断すると、上の立体が「芻甍」、下の立体が「芻童」の形になる。その場合、「芻甍」の底面が「芻童」の上面に相当する。

(93) 図９のように方亭の左右の斜面を切り離して合体させると、芻甍の形状を得る。

(94) 芻甍を陽馬と塹堵に分解し、棊を用いて体積公式を証明しようとする。図10参照。

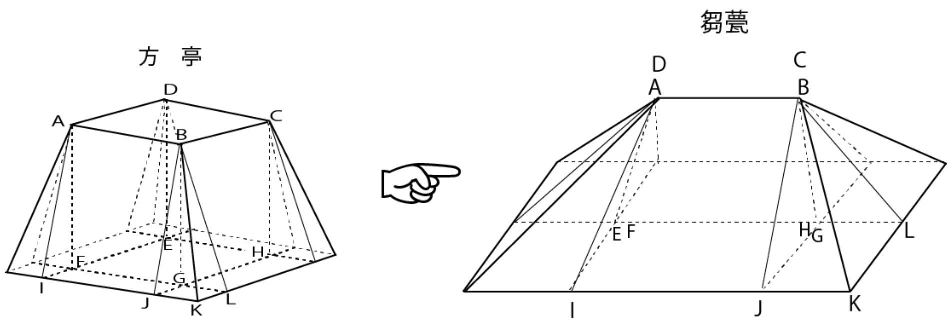

図９

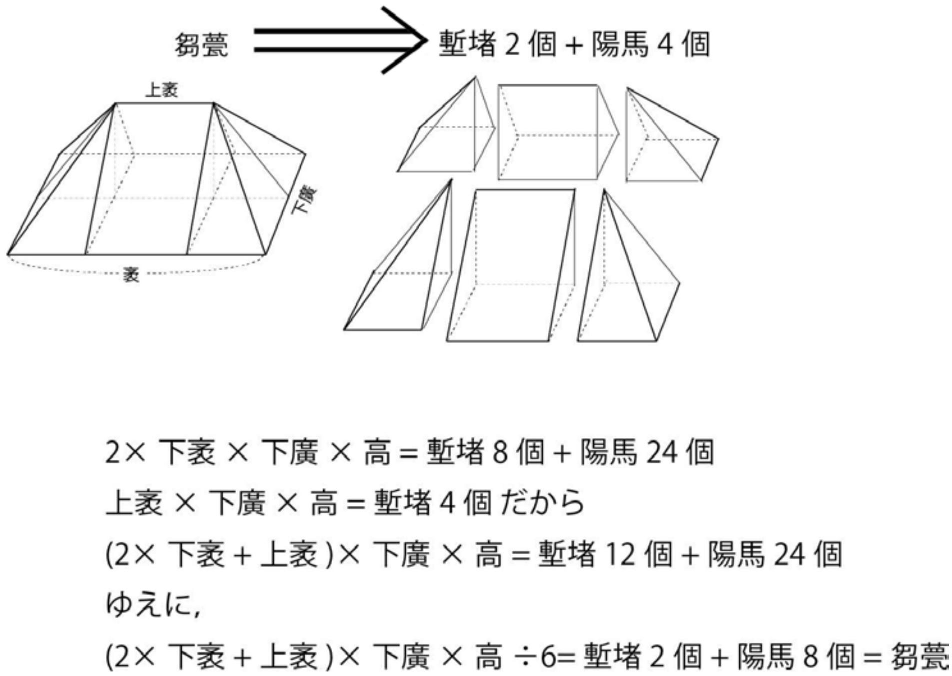

図10

(95) 以下では、別法を述べる。すなわち、左右の４陽馬と中央の２壍堵の体積を別々に算出して合計する。４陽馬を合体させると方錐ができ、その底面の１辺は芻甍の上下袤の差 (b_2-b_1)、他辺は芻甍の広 a に等しい。２壍堵を合体させると三角柱ができ、その底面の１辺は芻甍の上袤 b_1、他の１辺は芻甍の広 a に等しい。したがって、次式が成立する。

芻甍の体積 $V=$ ４陽馬＋２壍堵 $=\dfrac{a(b_2-b_1)\,h}{3}+\dfrac{ab_1h}{2}\left(=\dfrac{a(b_1+2b_2)h}{6}\right)$

訳：道理を推し量って明らかにすると、旧説に「凡そ刈草を積み上げた甍（屋根）で上下の広さが有るものを「童」という。甍とは屋根全体を蔽っている茨をいう」という。したがって、芻甍の下広・下袤は、芻童の上広・上袤に等しい。方亭の（左右の）斜面を垂直に切断して合体させると、すなわち芻甍の形になる。

仮に、下広２尺、下袤３尺、上袤１尺、上広はなく、高さ１尺とすれば、棊を用いてその立体を作ると、中央に壍堵が２個、左右の両端に陽馬が各２個になる。下袤を２倍し、上袤を加えると、７尺となる。広を掛けると、（底面の長方形の）冪14平方

尺が得られる。陽馬の冪は各２、塹堵の冪は各３の比率である。高さを掛けると、（直方体）の積14立方尺が得られる。本の棊において、それぞれの立体1個に対して６つ分になっている。だから６で割ると、その体積が得られる。

　また、次のようにしてもよい。上袤と下袤の差を広に掛け、さらに高さを掛け、３で割ると、すなわち左右４個の陽馬の体積である。下広を上袤に掛け、これを半分にし、高さを掛けると、すなわち中央２個の塹堵の体積である。それらを加えると、すなわち芻甍の体積となる。

芻童、曲池、盤池、冥谷、皆同術。
術曰、倍上袤、下袤從之、亦倍下袤、上袤從之、各以其廣乘之、幷、以高若深乘之、皆六而一[34]。
其曲池者、幷上中外周而半之、以爲上袤、亦并下中、外周而半之、以爲下袤[35]。

訓読：芻童、曲池、盤池、冥谷、皆術を同じくす。術に曰う、上袤を倍し、下袤は之に従（くわ）え、亦た下袤を倍し、上袤は之に従え、各々其の広を以て之に乗じ、并せて、高若くは深を以て之に乗じ、皆六にして一にす(96)。

　其の曲池なる者は、上の中・外周を并せて之を半にし、以て上袤と為し、亦た下の中・外周を并せて之を半にし、以て下袤と為す(97)。

注：(96) 芻童、盤池、冥谷の形状は四角錐台、曲池の形状はそれを湾曲させた立体である。図11参照。その体積公式は、上広 a_1、下広 a_2、上袤 b_1、下袤 b_2、高さ h とすると、

$$V_1=\frac{\{(2b_1+b_2)a_1+(2b_2+b_1)a_2\}h}{6}.$$

　『算数書』においても「芻童」が見られるが、その体積を求める公式は上記の式 V_1ではなく、後述のV_2、V_3とも異なっている。14)および注(99)参照。『数』でも「芻童」という名称は現れないが明らかに芻童と思われる立体の体積を求める算題が存在する。またその体積を求める公式には欠損があると思われるが、V_2、V_3と異なり、算数書と類似した式である。40)および注(99)参照。

　また「曲池」に相当するような湾曲した立体は『算数書』にも『数』にも見られない。

(97) 曲池の場合には、湾曲する上下の面を台形になるように引き延ばし、さらに台形の長辺と短辺を平均して長方形に変換することで、四角錐台の公式に当てはめる。

$$V_1=\frac{\{(2b_1+b_2)a_1+(2b_2+b_1)a_2\}h}{6}$$

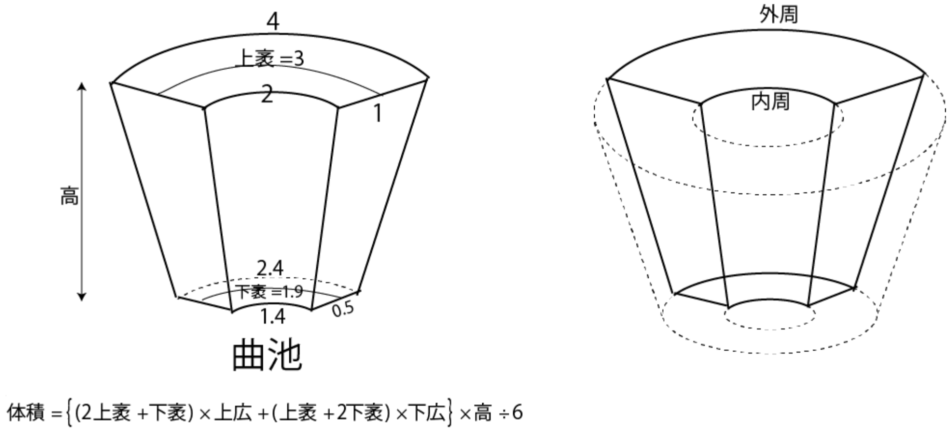

図11

訳：芻童、曲池、盤池、冥谷、皆術を同じ術である。

術にいう、上袤を２倍して下袤を加える。また下袤を２倍して上袤を加える。それぞれに広を掛け、加え并せて、高さもしくは深さを掛け、いずれの立体の場合でも６で割る。

曲池の場合には、上面の内周と外周を加え合わせて半分して上袤とし、亦た下面の内周と外周を加え合わせて半分にし、下袤とする。

[34] **[劉注]按、此術假令芻童上廣一尺、袤二尺、下廣三尺、袤四尺、高一尺、其用棊也、中央立方二、四面塹堵六、四角陽馬四。倍下袤爲八、上袤從之、爲十。以〔高〕**[一]**·廣乘之、得積三十尺。是爲得中央立方各三、兩端塹堵各四、兩旁塹堵各六、四角陽馬亦各六。後**[二]**倍〔上袤〕**[三]**、下袤從之、爲八。以高·廣乘之、得積八尺。是爲得中央立方亦各三、兩端塹堵各二。并兩旁、三品棊、皆一而爲六。故六而一卽得。**

爲術、又可令上下廣袤差相乘、以高乘之、三而一、亦四陽馬。上下廣袤互相乘、并而半之、以高乘之、卽四面六塹堵與二立方。并之、爲芻童積。

又可令上下廣袤互相乘、而半之、上下廣袤又各自乘、并以高乘之、三而一卽得也。

校訂：[一]「高」は、南宋本にはない。四庫本に従う。

[二]「後」は、四庫本では「復」に作る。どちらでも通じるが、南宋本に従っておく。

[三]「上袤」は、南宋本にはない。四庫本に従う。

訓読：按ずるに、此の術は、仮令に芻童上広一尺、袤二尺、下広三尺、袤四尺、高一尺なれば、

其の棊を用うるや、中央に立方二、四面に壍堵六、四角に陽馬四なり。下袤を倍して八と為し、上袤は之に従えて十と為す。高・広を以て之に乗じて積三十尺を得。是れ中央の立方各々三、両端の壍堵各々四、両旁の壍堵各々六、四角の陽馬亦各々六を得ると為す。後、上袤を倍し、下袤は之に従えて八と為す。高・広を以て之に乗じて積八尺を得。是れ中央の立方も亦各々三、両端の壍堵各々二を得ると為す。両旁を并すれば、三品の棊、皆一にして六と為す。故に六にして一とすれば即ち得(98)。

術を為すや(99)、又上下の広・袤の差をして相乗ぜしめ、高を以て之に乗じ、三にして一とすれば、亦四陽馬なるべし。上下の広袤互（たがい）相に乗じ、并せて之を半し、高を以て之に乗ずれば、即ち四面の六壍堵と二立方なり。之を并すれば、芻童の積と為る。

又上下の広・袤をして互相に乗ぜしめ、之を半にし、上下の広・袤をして又各自に乗ぜしめ、并せて高を以て之に乗じ、三にして一とすれば、即ち得べきなり。

注：(98) 劉徽注では、ここでも棊を用いて体積公式を検証する。図12のように芻童を切断して、立方体、壍堵、陽馬に分解し、術文に従って計算する。

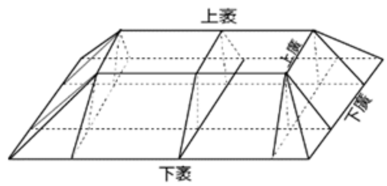

図12

芻童＝立方体 2 個＋塹堵 6 個＋陽馬 4 個
2× 下袤 × 下廣 × 高＝立方体 4 個＋塹堵 24 個＋陽馬 24 個
上袤 × 下廣 × 高＝立方体 2 個＋塹堵 8 個 だから
(2× 下袤＋上袤)× 下廣 × 高＝立方体 6 個＋塹堵 32 個＋陽馬 24 個
2× 上袤 × 上廣 × 高＝立方体 4 個
下袤 × 上廣 × 高＝立方体 2 個＋塹堵 4 個　だから
(2× 上袤＋下袤)× 上廣 × 高＝立方体 6 個＋塹堵 4 個
よって
{(2× 下袤＋上袤)× 下廣 +(2× 上袤＋下袤)× 上廣 }× 高
＝立方体 12 個＋塹堵 36 個＋陽馬 24 個
ゆえに
{(2× 下袤＋上袤)× 下廣 +(2× 上袤＋下袤)× 上廣 }× 高 ÷6
＝立方体 2 個＋塹堵 6 個＋陽馬 4 個＝芻童

各部分の立体１個に対してそれぞれ６つ分の体積量が得られることを示す。

(99) 以下では、別法として次の２式を述べる。上広 a_1、下広 a_2、上袤 b_1、下袤 b_2、高さ h とすると、

$$V_2=\frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)h}{3}+\frac{(a_1b_2+a_2b_1)h}{2}$$

$$V_3=\frac{\left\{\left(\frac{a_1+b_2}{2}+\frac{a_2b_1}{2}\right)+\left(\frac{a_1+b_1}{2}+\frac{a_2b_2}{2}\right)\right\}h}{3}$$

第１式は、陽馬とそれ以外の立体（直方体・塹堵）の体積を別々に算出して合計する。４隅の４陽馬を合体させると四角錐ができるが、底面の２辺は、上広と下広の差 (a_2-a_1)、上袤と下袤の差 (b_2-b_1) になる。その２辺と高さをかけ合わせて３で割ると、４陽馬の体積が得られる。直方体と塹堵からなる立体の体積については、上広 a_1と下袤 b_2、下広 a_2と上袤 b_1をそれぞれ底面とする直方体の体積を出して、２つを合わせると、それぞれの部分の２個分になる。そこで、２で割ると直方体と塹堵の体積が得られる。

第２式には、公式を示すだけで、数理的な説明はない。式を変形させ、２辺の積の和になるようにして導き出したのかもしれない。

なお、『算数書』の「芻童」の体積を求める公式は、以下の通りである。

$$V_4=\frac{\{a_1b_1+a_2b_2+(b_1+b_2)a_1+(b_1+b_2)a_2\}h}{6}$$

また『数』の「芻童」と思われる立体の体積を求める公式は、以下の通りである。

$$V_5=\frac{\{a_1b_1+a_2b_2+(a_1+a_2)(b_1+b_2)\}h}{6}$$

訳：按ずるにこの術において、例えば芻童を上広１尺、上袤２尺、下広３尺、下袤４尺、高１尺とした場合、用いる棊は、中央に立方２個、４面に塹堵６個、４角に陽馬４個である。下袤を２倍すれば８尺となり、上袤を加えると10尺となる。高さ、広をそれに掛けると、体積30立方尺を得る。これは、中央の立方が各３個、両端の塹堵が各４個、両旁の塹堵が各６個、四角の陽馬がまた各６個を得たことになる。後に上袤を２倍し、下袤を加えると、８尺となる。高さ、広をそれに掛けると、体積８立方尺を得る。これは中央の立方体がまた各３個、両端の塹堵が各２個を得たことになる。これら両側の体積を合計すると、３種類の棊において、各部分に対して６個分となる。故に６で割るとすなわち芻童の体積が得られる。

解法について、次のようにしてもよい。上下広、上下袤の差を掛け合わせ、高さを

これに掛け、３で割ると、また（４隅の）４陽馬（の体積）になる。上下の広、上下の袤を斜めに掛け合わせ、加え合わせて半分にし、高をこれに掛けると、すなわち四面の６塹堵と２立方となる。それらを加え合わせると、芻童の体積になる。

　また、別法として次のようにしてもよい。上下の広、上下の袤を相互に掛け合わせて半分にし、上下の広、上下の袤を各自（上広は上袤と、下広は下袤と）掛け合わせ、それらを加え合わせて高を掛け、３で割ると、すなわち（芻童の体積が）得られる。

[35] **[劉注] 此池環而不通匝、形如盤蛇而曲之。亦云周者、謂如委穀依垣之周耳。引而伸之、周爲袤。求袤之意、環田也。**

訓読： 此の池は環にして通匝せず、形は盤蛇の如くして之を曲ぐ。亦「周」と云う者は、穀を委ねて垣に依るの周の如きを謂う耳。引きて之を伸せば、周は袤と為る。袤を求むるの意、環田なり(100)。

注：（100）環田は、方田章の末尾の設問に見える。20）の37頁以下参照。

訳： 此の池（曲池）は環状になっているが、（両端は切れていて）一回りしておらず、その形状はとぐろを巻く蛇のように湾曲している。また、「周」というのは、（後問の）穀物を積み上げて垣根に寄りかからせた場合の「周」と同様のものをいう。これを引き延ばすと、「周」は袤となる。袤を求める数理は、環田と同じである。

[一九] 今有芻童、下廣二丈、袤三丈、上廣三丈、袤四丈、高三丈。問、積幾何。
荅曰二萬[一]六千五百尺。

校訂：[一]楊輝本、四庫本は「一萬」に誤るが、南宋本に従う。

訓読： 今、芻童有り、下広二丈、袤三丈、上広三丈、袤四丈、高三丈。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、二万六千五百尺(101)。

注：（101）ここでの「芻童」は図13にあるような四角錐台である。ここでの計算は、次の通りである。

$$V=\{(\text{上袤}4\text{丈}\times2+\text{下袤}3\text{丈})\times\text{上広}3\text{丈}+(\text{下袤}3\text{丈}\times2+\text{上袤}4\text{丈})\times\text{下広}2\text{丈}\}\times\text{高さ}3\text{丈}\div6=(110\text{尺}\times30\text{尺}+100\text{尺}\times20\text{尺})\times30\text{尺}\div6=26500\text{立方尺}$$

訳： 今、芻童があり、下広２丈、下袤３丈、上広３丈、上袤４丈、高３丈である。問う、

体積は如何ほどであるか。答えにいう、26500立方尺。

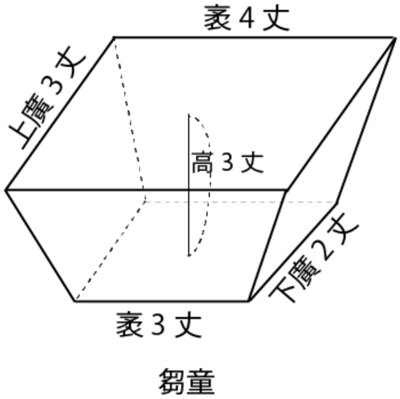

図13

[二〇]今有曲池、上中周二丈、外周四丈、廣一丈、下中周一丈四尺、外周二丈四尺、廣五尺、深一丈。問、積幾何。荅曰、一千八百八十三尺三寸少半寸。

訓読：今、曲池有り、上の中周二丈、外周四丈、広一丈、下の中周一丈四尺、外周二丈四尺、広五尺、深一丈。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、一千八百八十三尺三寸少半寸(102)。

注：(102) 湾曲した形状を四角錐台に引き延ばして考える。すなわち、上下の内周（原文「中周」）・外周の平均値を算出し、それを四角錐台の上袤、下袤と見なす。

（内周２丈+外周４丈）÷２＝３丈＝30尺（上袤と見なす）

（内周１丈４尺＋外周２丈４尺）÷２＝１丈９尺＝19尺（下袤と見なす）

$V=\{(\text{上袤30尺}\times 2+\text{下袤19尺})\times\text{上広10尺}+(\text{下袤19尺}\times 2+\text{上袤30尺})\times\text{下広5尺}\}\times\text{深さ10尺}\div 6$

$=(79\text{尺}\times 10\text{尺}+68\text{尺}\times 5\text{尺})\times 10\text{尺}\div 6=\frac{11300}{6}=1883\frac{1}{3}\text{立方尺}=1883.3\frac{1}{3}\text{立方尺}$

訳：今、曲池があり、上面の内周２丈、外周４丈、広さ１丈、下面の内周１丈４尺、外周２丈４尺、広５尺、深１丈である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、1883立方尺 $3\frac{1}{3}$「寸」（「寸」＝100立方寸）。

参考文献

１）李継閎『《九章算術》校証』（1993年９月）

２）郭書春『匯校九章算術』（2004年８月）
３）郭書春・劉鈍『算経十書』（遼寧教育出版社、1998年12月）、（九章出版社、2001年４月）
４）川原秀城「劉徽註九章算術」（『中国天文学・数学集』所収、1980年11月）
５）白尚恕『《九章算術》注釈』（1983年12月）
６）沈康身『九章算術導読』（1997年２月）
７）李継閔『《九章算術》及其劉徽注研究』（1992年８月）
８）李継閔『《九章算術》導読与訳注』（1998年９月）
９）李籍『九章算術音義』（文淵閣四庫全書本及び四部叢刊本『九章算術』所収）
10）「九章算術補註」（李儼『中算史論叢』（三）、1935年12月）
11）楊輝『詳解九章算法』（宜稼堂叢書本）
12）李潢『九章算術細草図説』（嘉慶庚辰（25年）語鴻堂刊本）
13）清水達雄『九章算術』1～15（「数学セミナー」1975年２月号～1976年４月号）
14）張家山漢簡『算数書』研究会編『漢簡『算数書』－中国最古の数学書－』（朋友書店、2006年10月）
15）Shen, Kang-Shen, Crossley, John N., Lun, Anthony W. C.『The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary』（Oxford Univ. Press, 1999年10月）
16）大川俊隆『九章算術』訳注稿（1）大阪産業大学論集　人文・社会科学編２号（2008年２月）
17）大川俊隆『九章算術』訳注稿（2）大阪産業大学論集　人文・社会科学編３号（2008年６月）
18）Chemla, Karine; Guo, Shuchun『Les neuf chapîtres, Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires』（Dunod, 2004年第４四半期）
19）大川俊隆『九章算術』訳注稿（3）大阪産業大学論集　人文・社会科学編４号（2008年10月）
20）大川俊隆『九章算術』訳注稿（4）大阪産業大学論集　人文・社会科学編５号（2009年２月）
21）馬場理恵子『九章算術』訳注稿（5）大阪産業大学論集　人文・社会科学編６号（2009年６月）
22）馬場理恵子『九章算術』訳注稿（6）大阪産業大学論集　人文・社会科学編７号（2009年10月）
23）銭宝琮点校『九章算術点校』（北京中華書局刊『算経十書』所収、1963年10月）
24）角谷常子、張替俊夫『九章算術』訳注稿（7）大阪産業大学論集　人文・社会科学編８号（2010年２月）
25）汪莱撰『校正九章算術及戴氏訂訛』（『衡齋遺書』所収）
26）角谷常子、張替俊夫『九章算術』訳注稿（8）大阪産業大学論集　人文・社会科学編９号（2010年６月）

27) 田村誠、張替俊夫「新たに出現した二つの古算書―『数』と『算術』」大阪産業大学論集　人文・社会科学編 9 号（2010年 6 月）
28) 郭書春『九章算術訳注』（上海古籍出版社、2009年12月）
29) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（9）大阪産業大学論集　人文・社会科学編10号（2010年10月）
30) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（10）大阪産業大学論集　人文・社会科学編11号（2011年 2 月）
31) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（11）大阪産業大学論集　人文・社会科学編12号（2011年 6 月）
32) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿（12）大阪産業大学論集　人文・社会科学編13号（2011年10月）
33) 朱漢民、陳松長主編『岳麓書院蔵秦簡（貳）』（上海辞書出版社、2011年12月）
34) 小寺裕、武田時昌『九章算術』訳注稿（13）大阪産業大学論集　人文・社会科学編14号（2012年 2 月）
35) 田村誠、武田時昌『九章算術』訳注稿（14）大阪産業大学論集　人文・社会科学編15号（2012年 6 月）
36) 大川俊隆　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（1）大阪産業大学論集　人文・社会科学編16号（2012年10月）
37) 田村誠　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（2）大阪産業大学論集　人文・社会科学編17号（2013年 2 月）
38) 馬場理恵子、吉村昌之　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（3）大阪産業大学論集　人文・社会科学編18号（2013年 6 月）
39) 角谷常子　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（4）大阪産業大学論集　人文・社会科学編19号（2013年10月）
40) 小寺裕、張替俊夫　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（5）大阪産業大学論集　人文・社会科学編20号（2014年 2 月）
41) 武田時昌　岳麓書院蔵秦簡『数』訳注稿（6）大阪産業大学論集　人文・社会科学編21号（2014年 6 月）