『九章算術』訳注†稿（12）

田　村　　誠、吉　村　昌　之

中国古算書研究会

大川　俊隆、小寺　裕、角谷　常子、武田　時昌

田村　三郎、田村　誠、張替　俊夫、矢崎　武人††、吉村　昌之

Translation and Annotation of "The Nine Chapters on the Mathematical Art（九章算術）" Vol. 12

TAMURA Makoto

YOSHIMURA Masayuki

Abstract

"The Nine Chapters on the Mathematical Art" was the oldest book of mathematics in China before the unearthing of "Suan-shu shu." The aim of our research is to provide a complete translation and annotation of it including annotations of Liu Hui（劉徽）and Li Chunfeng（李淳風）from the viewpoint of our previous work on "Suan-shu shu."

This is the twelfth article based on our research and results in which we studied the problems 23 and 24 of Chapter 4, Shaoguang（少広）.

『九章算術』は『算数書』出土以前は数学書としては中国最古のものであった。我々は、我々の『算数書』研究を起点に、『九章算術』の劉徽注、李淳風注を含めた訳注を完成させることを目的としている。

---

† This work was partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research（C）(20500879).

†† 矢崎武人氏は平成23年3月17日ご逝去された。ご冥福をお祈りしたい。

平成23年6月30日　原稿受理

本論文では、少広章の算題(23)と(24)に対する訳注を与える。

[二三]今有積四千五百尺[39]。問爲立圓徑幾何。荅曰、二十尺[40]。
[二四]又有積一萬六千四百四十八億六千六百四十三萬七千五百尺。問爲立圓徑幾何。荅曰、一萬四千三百尺[41]。

訓読：[二三](124)今、積四千五百尺有り。問う、立円(125)の径を為すこと幾何ぞ。答えに曰う、二十尺(126)。
[二四]又、積一万六千四百四十八億六千六百四十三万七千五百尺有り(127)。問う、立円の径を為すこと幾何ぞ。答えに曰う、一万四千三百尺(128)。

注：(124) 算題［二三］と［二四］は後文の開立円術を用いるもので、球の体積から球の直径を求める問題である。

(125)「立圓」とは立体の円、すなわち球のことである。『算数書』では「圓」字は用いられず「圜」字が用いられている。14) 算題【7】「井材」題の注1) 参照。また、『九章算術』では円と球を区別していて、平面図形の円は平圓（または単に圓）とし、球は立圓としている。これに対し、後文の劉注［42］に見えるように、球を劉徽は「丸」と呼び、張衡は「渾」と称している。

(126) 計算は、後の「開立圓」の術文にあるように、直径Rとして球の体積Vの近似値を$V=\dfrac{9}{16}R^3$のように与え、これにより$R=\sqrt[3]{\dfrac{16}{9}V}$と求めている。この近似値は球を別の立体で近似したことによるもので、円周率の近似ではない。その導出については後文の劉注［42］を参照。ここでの計算は、4500×16÷9=8000を開立方して20であると求めている。

(127) 現在は「千億」の10倍の位は「兆」であるが、ここでは「万億」と呼んでいる。いわゆる大乗法である。

(128) この算題でも、上注(126)と同じ方法で、1644866437500×16÷9 = 2924207000000を開立方して14300であると求めている。

訳：[二三] 今、体積4500立方尺の球がある。問う、球の直径はどれほどか。答えにいう、二十尺である。
[二四] 又、体積1644866437500立方尺の球がある。問う、球の直径はどれほどか。答

えにいう、14300尺である。

[39] [劉注] 亦謂立方之尺也。

訓読：亦た立方の尺[129]を謂う也。

注：(129)「立方」は立体の意。「立方之尺」は立体の尺数の意で、今で言う立方尺に同じ。31) 注 (82) 参照。

訳：また立体の尺数を言うのである。

[40]**依** [一] **密率、立圓徑二十尺、計積四千一百九十尺二十一分尺之一十。**

校訂：[一] 郭書春云う、「聚珍版・四庫本は「依」の上に「淳風等按」の四字があり、屈刻本は「臣淳風等謹按」とする」と。ここでは 2) に従い、これらの文字は補わない。

訓読：密率[130]に依れば、立円の径二十尺は、計積[131]四千一百九十尺二十一分尺の一十[132]。

注：(130)「密率」の語があるのでここは李淳風の注である。注［41］も同じ。

(131)「計積」は計算によって求められる体積の意か。第六巻劉注［16］や、『五経算術』巻上「論語千乗之国法」にも見える。

(132) 李淳風のいう「密率」とは、祖冲之の「約率」$\frac{22}{7}$である。19) 注 (84) 参照。ここでの計算は、直径Rとして球の体積Vを$V=\frac{\pi}{6}R^3 \fallingdotseq \frac{11}{21}R^3$のように与え、体積$V=20^3\times 11\div 21=4190\frac{10}{21}$としている。この計算は後の「開立圓」の術文とは異なり、円周率の近似$\pi \fallingdotseq \frac{22}{7}$を除けば、球の体積計算として正しいものである。

訳：「密率」$\left(\frac{22}{7}\right)$によれば、直径20尺の球は、体積$4190\frac{10}{21}$尺になる。

[41] **依** [一] **密率、爲徑一萬四千六百四十三尺四分尺之三。**

校訂：[一] 郭書春云う、「聚珍版・四庫本は「依」の上に「淳風等按」の四字があり、屈刻本は「臣淳風等謹按」とする」と。ここでも 2) に従い、これらの文字は補わない。

訓読：密率に依れば、径一万四千六百四十三尺四分尺の三と為す[133]。

注：(133) ここでの計算は、李注［40］と同様に$V=\frac{11}{21}R^3$を開立方している。上注 (132) 参照。しかしその値は、$1644866437500\times 21\div 11=3140199562500$を開立方した14643.7537…を、$14643\frac{3}{4}$と求めている。ここで、計算を14643.75で打ち切って近似値$14643\frac{3}{4}$を与えたのは、「強半」にこだわったためか。

訳：「密率」$\left(\frac{22}{7}\right)$によれば、直径は$14643\frac{3}{4}$となる。

開立圓[一]

術曰、置積尺數、以十六乘之、九而一、所得、開立方除之、即(丸)〔立圓〕[二] 徑 [42][43]。

校訂：［一］郭書春は「開立圓」と「術曰」を続けるが、南宋本は「術曰」の前で改行している。今、南宋本に従う。

［二］郭書春云う、「「丸」字を、聚珍版·四庫本は「圓」と誤っている。『九章算術』では球を「立圓」と称しているが、劉徽は「丸」と改称している。ここは経文であるから、「立圓」とあるべきであろう」。

訓読：開立円

術に曰く、積の尺数を置き、十六を以て之に乗じ、九にして一とし、得る所は、開立方して之を除せば、即ち立円の径なり。

訳：開立円

術にいう、体積の尺数を置いて、16 をこれに乗じて 9 で割り、得られるものを開立方して除くと、立体の円（球）の直径となる。

[42]［劉注］立圓、即丸也。爲術者蓋依周三徑一之率。令圓冪居方冪四分之三。圓囷居立方亦四分之三。更令圓囷爲方率十二、爲丸率九、丸居圓囷又四分之三也。置四分自乘得十六、三分自乘得九、故丸居立方十六分之九也。故以十六乘積、九而一、得立方之積。丸徑與立方等、故開立方而除、得徑也。

然此意非也。何以驗之。取立方棊八枚、皆令立方一寸、積之爲立方二寸。規之爲圓囷、徑二寸、高二寸。又復橫因之、則其形有似牟合方蓋矣。八棊皆似陽馬、圓然也。按、合蓋者、方率也、丸居其中、即圓率也。推此言之、謂夫圓囷爲方率、豈不闕哉。以周三徑一爲圓率、則圓冪傷少、令圓囷爲方率、則丸積傷多、互相通補。是以（丸）〔九〕[一] 與十六之率偶與實相近、而丸猶傷多耳。觀立方之內、合蓋之外、雖衰殺有漸、而多少不掩、判合總結、方圓相纆、濃纖詭互、不可等正。欲陋形措意、懼失正理。敢不闕疑、以俟能言者。

黃金方寸、重十六兩。金丸徑寸、重九兩。率生於此、未曾驗也。『周官』考工記、「㮚氏爲量、改煎金錫則不耗。不耗然後權之、權之然後準之、準之然後量之。」言錬金使極精、而後分之則可以爲率也。

（今）〔令〕[二] 丸徑自乘、三而一、開方除之、即丸中之立方也。假令丸中立方五尺、五尺爲句、句自乘冪二十五尺。倍之得五十尺、以爲(股)〔弦〕[三] 冪、謂平面方五尺之弦也。以此弦(冪)[四] 爲股、亦以五尺爲句、并句股冪得七十五尺、是爲大弦冪。開方除之、則大弦可知也。大

弦則中立方之長邪、邪即丸徑也。故中立方自乘之冪於丸徑自乘之冪、三分之一也。(今)〔令〕[五]大弦還乘其冪、即丸外立方之積也。大弦冪開之不盡、令(困)〔其〕[六]冪七十五再自乘之、爲面、命得外立方積四十二萬一千八百七十五尺之面。又令中立方五尺自乘、又以方乘之、得積一百二十五尺。一百二十五尺自乘、爲面、(句)〔命〕[七]得積一萬五千六百二十五尺之面。皆以六百二十五約之、外立方積六百七十五尺之面、中立方積二十五尺之面也。

張衡算又謂、立方爲質、立圓爲渾。衡言質之與中外之渾、六百七十五尺之面、開方除之、不足一、謂外(質)〔渾〕[八]積二十六也。內渾二十五之面、謂積五尺也。今徽令質言中渾、渾又言質、則二質相與之率猶衡二渾相與之率也。衡蓋亦先二質之率推以言渾之率也。衡又言質六十四之面、渾二十五之面。質復言渾、謂居質八分之五也。又云、方八之面、圓〔五之面〕[九]、圓渾相推、知其復以圓困爲方率、渾爲圓率也、失之遠矣。衡說之自然、欲協其陰陽奇耦之說而不顧疏密矣。雖有文辭、斯亂道破義、病也。

置外質積二十六、以九乘之、十六而一、得積十四尺八分〔尺〕[一〇]之五、即質中之渾也。以分母乘全內子、得一百一十七。又置內質積五、以分母乘之、得四十、是爲質居渾一百一十七分之四十、而渾率猶爲傷多也。

假令方二尺、方四面、并得八尺也、謂之方周。其中令圓徑與方等、亦二尺也。(丸)〔圓〕[一一]半徑以乘圓周之半、即圓冪也。半方以乘方周之半、即方冪也。然則方周者、方冪之率也。圓周者、圓冪之率也。按、如衡術、方周率八之面、圓周率五之面也。令方周六十四尺之面、即圓周四十尺之面也。又令徑二尺自乘、得徑四尺之面、是爲圓周率〔一〕十(二)之面[一二]、而徑率一之面也。衡亦以周三徑一之率爲非、是故更著此法。然增周太多、過其實矣。

校訂：［一］南宋本は「丸」とするが、郭書春は、「「丸」字は誤り、聚珍版・四庫本は「九」に改めているが、説明はない」とする。

［二］南宋本は「今」とするが、戴震輯校本に従い「令」とする。文淵閣本は「命」とする。

［三］南宋本は「股」とするが、銭校本に従い、「股」を「弦」とする。

［四］銭校本に従い、「冪」字は衍字である。

［五］南宋本は「今」とするが、戴震輯校本に従い、「今」を「令」とする。文淵閣本は「今」とする。

［六］郭書春は、「聚珍版・四庫本は、「七十五とは即ち大弦冪なり、是れ外立方一面自乘の冪為りて、困冪には非ざるなり。「困冪」はまさに是れ「其冪」の誤り」とする。その後の諸本はこれに従って改めている」と。

［七］郭書春云う、「聚珍版・四庫本は、「「句」字は誤り。上に「命じて得る外立方の積」の面と云うのによれば、此れは乃ち「命じて得る中立方の積」の面ということである。「句」は「命」とすべきである」とする。その後の諸本はこれに従って改めている」とする。

［八］汪萊は、「「質」は、「渾」の誤り」という。25）参照。李潢は、「「外質」の二字は衍字であろう」とする。郭書春は汪萊に従う。

［九］郭書春は、「聚珍版･四庫本は、「此下に「六之面」の三字を脱す」と。屈刻本･孔刻本はこれによって補っている。李潢は、「「六」は「五」とすべきである。下文に「方周率八之面、圓周率五之面」とあることからわかる」と考える。汪萊もこの説を支持している。今、従う」とする。

［一〇］郭書春は、「「分」字の下に「尺」字を脱す、今補う」とする。

［一一］李潢は、「「丸」は「圓」とするべきで、声の誤りである」とする。

［一二］李潢は、「「是爲圓周率十二之面」は、「圓周率一十之面」とあるべき」とする。

訓読：立円とは、即ち丸也。術を為す者、蓋し「周三径一」の率に依る。円冪をして方冪の四分の三に居らしむ。円囷、立方に居るもまた四分の三(134)。更に円囷をして方率十二と為し、丸率九と為さしめば(135)、丸の円囷に居るも、また四分の三也。四分を置きて自乗して十六を得、三分を自乗して九を得、故に丸は立方の十六分の九に居る也。故に十六を以て積に乗じ、九にして一とし、立方の積を得。丸径と立方(136)とは等し、故に開立方して除せば、径を得るなり。

然れども此の意は非なり。何を以てか之を験せん。立方の棊八枚を取るに、皆な立方一寸をして之を積ましめば､立方二寸と為す。之を規して(137)円囷を為せば､径二寸、高二寸なり。また復して横して之に因れば(138)、則ち其の形は牟合方蓋に似たる有り。八棊は皆な陽馬に似て､円然たり(139)。按ずるに､合蓋とは､方率なり､丸は其中に居り､即ち円率なり(140)。此を推して之を言えば、夫れ円囷を方率と為すと謂うは、豈に闕かざらんや(141)。周三径一を以て円率と為せば、則ち円冪傷ること少なく、円囷をして方率と為さしむれば、則ち丸積傷ること多く(142)、互に相い通補す。是を以て九と十六の率は偶ま実と相い近くして、丸は猶ほ傷ること多きのみ。立方の内、合蓋の外を観るに、衰殺し漸有りと雖も、而して多少は掩ず。判合総結すれども、方円相ひ纒い、濃纎詭互して、等正す可からず。形を陋くし意を措かんと欲するも、正理を失うを懼る。敢て疑を闕きて、以て能く言う者を俟たざらんや。

黄金、方寸なれば、重は十六両。金丸、径寸なれば、重は九両。率は此れより生ずるも、未だ嘗て験せざるなり。『周官』考工記に、「栗氏量を為むるに、金錫を改煎すれば則ち耗せず。耗せざりて然る後に之を権り、之を権りて然る後に之を準り、之を準りて然る後に之を量る(143)」と。言うこころは、錬金は極精を使い、而して後に之を分くれば則ち以て率と為す可きなり。

丸径をして自乗せしめ、三にして一とし、開方して之を除けば、即ち丸中の立方な

り[144]。仮令に丸中の立方五尺とせば、五尺を句と為し、句自乗せば冪は二十五尺。之を倍して五十尺を得、以て弦冪と為す、平面の方五尺の弦を謂う也。此の弦を以て股と為し、また五尺を以て句と為す、句・股の冪を并せて七十五尺を得、是れ大弦の冪と為す[145]。開方して之を除けば、則ち大弦は知る可きなり。大弦は則ち中立方の長邪、邪は即ち丸径なり。故に中立方の自乗の冪は丸径の自乗の冪に於て、三分の一也。大弦をして其の冪に還乗せしむれば、即ち丸の外立方の積也[146]。大弦冪、之を開きて尽きざれば、其の冪七十五をして再び之を自乗せしめ、面を為り、命じて外立方の積四十二万一千八百七十五尺の面を得。また中立方五尺をして自乗せしめ、また方を以て之に乗じ、積一百二十五尺を得。一百二十五尺は自乗して、面を為り、命じて積一万五千六百二十五尺の面を得。皆な六百二十五を以て之を約さば、外立方の積は六百七十五尺の面、中立方の積は二十五尺の面也[147]。

張衡の算はまた立方を謂いて質と為し、立円を渾と為す。衡の言へらく、「質と中外の渾とは、六百七十五尺の面、開方して之を除けば、足らざるは一、外渾の積は二十六と謂うなり。内渾は二十五の面、積は五尺と謂うなり[148]」と。今、徽は質をして中渾を言わしめ、渾をしてまた質を言わしむれば、則ち二質の相与の率は、猶ほ衡の二渾の相与の率のごとき也[149]。衡は蓋し亦た、二質の率を先とし、推して以て渾の率を言う也。衡はまた言う、「質は六十四の面、渾は二十五の面」と。質、復た渾を言えば、質の八分の五に居るを謂うなり。又云う、「方は八の面、円は五の面」と。円渾相ひ推せば、其れ復た円囷を以て方率と為し、渾を円率と為し、之を失すること遠きを知るなり[150]。衡、之を説くこと自ら然り、其の陰陽奇偶の説に協さんと欲して[151]踈密を顧ざるなり。文辞有りと雖も、斯れ道を乱し義を破るは、病なり。

外質の積二十六を置き、九を以て之に乗じ、十六にして一とす、積十四尺八分尺の五を得、即ち質中の渾なり[152]。分母を以て全に乗じて子に内れ、一百一十七を得。また内質の積五を置き、分母を以て之に乗じて、四十を得、是れ質為りて渾一百一十七分の四十に居る[153]、而ども渾の率は猶お傷ること多きと為す也。

假令に方二尺なれば、方四面は、并せて八尺を得る也、之を方周と謂う。其中に円径と方をして等しからしむ、また二尺なり。円の半径は以て円周の半に乗ずれば、即ち円冪也。半方は以て方周の半に乗ずれば、即ち方冪也。然らば則ち方周は、方冪の率也。円周は、円冪の率也[154]。按ずるに、衡の術の如きは、方周率は八の面、円周率は五の面なり。方周をして六十四尺の面たらしむれば、即ち円周は四十尺の面也。また径二尺をして自乗せしむれば径四尺の面を得、是れ円周率一十の面と為り、而して径率は一の面也[155]。衡もまた周三径一の率を以て非と為し、是れが故に更に此の

法を著す。然れども周を増すこと太だ多くして、其の実に過ぐるなり。

注：(134)「囷」は円柱形の糧倉、『算数書』【13】58囷蓋注１参照。『説文』（巻六下、囗部）に「囷、廩之圜者。从禾在囗中。圜謂之囷、方謂之京」とある。

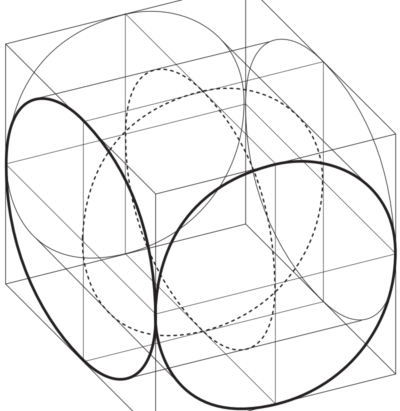
(135) 円柱と球はそれぞれ正方形と円の回転体であり、正方形と円の面積比は4：3である。回転体であるから円率３をかけて、円柱と球の体積比を4×3：3×3＝12：9としたと思われるが、これは後文にあるように、円柱に比べて球が大きい比となっている。実際の円柱と球の体積比は、直径をRとして$\pi\times\left(\frac{R}{2}\right)^2\times R:\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{R}{2}\right)^3=\frac{\pi}{4}R^3:\frac{\pi}{6}R^3=3:2$であり、円柱を12とすれば球は８である。

(136) この「立方」は立方体の一辺を指す。

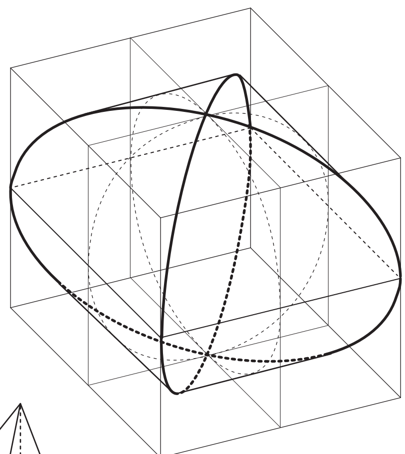
(137)「規」はぶんまわし。19）注（95）参照。ここでは円柱を刳り抜くこと。

(138)「因」は踏襲するの意でくりかえすこと。ここでは横にした後、再び刳り抜くことを指す。

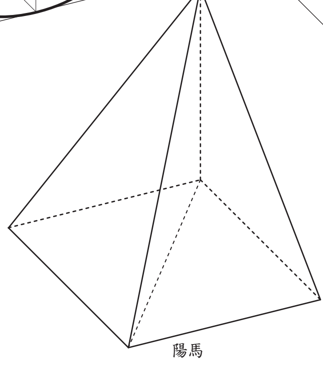
(139)「牟合方蓋」は、同じ太さの２つの円柱を、中心線が直交するように置いたとき、それらが切り取ってできる部分。これを「四角の蓋をかぶせ合わせた形」と表現している。後文の「合蓋」はその略。「陽馬」は２つの三角錐を貼り合わせてできる立体。図参照。



2つの円柱



牟合方蓋



陽馬

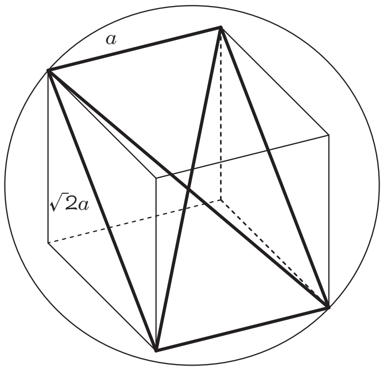
(140) 直交する 2 円柱を水平に置いたとき、「合蓋」の水平方向の断面は正方形となる。「合蓋」の内接球の水平方向の断面はこの正方形の内接円であるから、合蓋と球の体積比は、方率と円率の比となる。

(141)「合蓋」こそが、球の円率に対して方率を持つものであって、円柱ではないのだと述べている。

(142) 実際の円柱：球の体積比は 3：2 であり、円柱を 12 とすれば球は 8 である。注(135) 参照。

(143)「金錫」は銅と錫の合金で青銅のこと。「改煎」とは製錬すること。「権」は重量をはかること。「準」は打って平らにすること。「量」は体積をはかること。

(144)「丸中の立方」は球に内接する立方体のことで、その対角線は球の直径である。立方体の一辺を a とすると、立方体の 2 つの対角線を含む断面は a と $\sqrt{2}$ を辺長にもつ長方形であるから（下図参照）、三平方の定理より球の直径 R について $R^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$ であり、したがって $a = \sqrt{\frac{R^2}{3}}$ である。



(145) 内接立方体の一辺 a を 5 として計算すると、三平方の定理を用いて注(144) のように $R^2 = 5^2 + 2\times5^2 = 75$ と求められるが、これが「大弦の羃」である。

(146)「大弦」は、球の直径でもあり、外接立方体の1辺でもあるので、その 3 乗は外接立方体の体積に等しい。

(147)「大弦」R が無理数 $\sqrt{75}$ であるので、外接立方体の体積 R^3 も無理数であって、開き尽くすことができない。そこでその自乗 R^6=421875を用いて、内接立方体の体積の自乗 a^6＝15625との比をとると、$R^6 : a^6$＝421875：15625＝675：25を得る。

(148) 675 の平方根は無理数であるが、26^2＝676 であるので $\sqrt{675} \fallingdotseq 26$ として、$R^3 : a^3 = \sqrt{R^6} : \sqrt{a^6} = \sqrt{675} : \sqrt{25} \fallingdotseq 26 : 5$ を得ている。

（149）立方体の体積 V_C とし、その内接球の体積 V_B、その球に内接する立方体の体積 v_C、さらにその立方体に内接する球の体積を v_B とすれば、$V_C : V_B = v_C : v_B$ であるから、$V_C : v_C = V_B : v_B$ である。すなわち、球に外接・内接する立方体の体積比と、立方体に外接・内接する球の体積比は等しいので、その比は前注で求めたおよそ 26：5 である。

（150）張衡は立方体と内接球の体積比は $\sqrt{64} : \sqrt{25} = 8 : 5$ であるとしたが、劉徽はこれは古法が教える 16：9 の比より悪い評価であると述べている。

（151）陰は偶数、陽は奇数を意味する。張衡は、方の 8、円の 5 を陰陽思想の偶数と奇数と関連付けて説明しようとしたとの意であろう。

（152）外接立方体の体積を $\sqrt{675} \fallingdotseq 26$ とすると、外接立方体と球との体積比が 16：9 であったので、球の体積は $26 \times \frac{9}{16} = \frac{117}{8} = 14\frac{5}{8}$ となる。

（153）外接立方体と内接立方体の体積比が 26：5 であったので、球と内接立方体の体積比は $\frac{117}{8} : 5 = 117 : 40$ となる。

（154）正方形と内接円の面積比は、半方（一辺の半分）と半径が 1 尺で等しいので、正方形の外周と円周の比に等しいと述べている。

（155）正方形の一辺が 2 尺であったから、その外周は $8 = \sqrt{64}$ 尺である。張衡によれば正方形と内接円の面積比は $\sqrt{8} : \sqrt{5} = \sqrt{64} : \sqrt{40}$ であり、$2 = \sqrt{4}$ で約して $\sqrt{16} : \sqrt{10}$ に等しい。したがって一辺 1 の正方形に内接する円の周を $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.162$ と求めることができる。これは円周率の別の近似を与えるものであるが、やはり実際より円周が大きめに誤まるものとなっている。

訳：「立円」とは、球のことである。術を作った者は、おそらく次のようにしたのであろう。「「周三径一」の率に依れば、正方形の内接円の面積は正方形の面積の $\frac{3}{4}$ であるから、立方体に内接する円柱の体積もまた、立方体の体積の $\frac{3}{4}$ である。さらに円柱に内接する球においても円柱には方率を12とし、球には丸率を 9 とすれば、球が円柱に内接するときもまた体積は $\frac{3}{4}$ となる。4 は自乗して16であり、3 は自乗して 9 であるから、立方体に内接する球は、立方体の $\frac{9}{16}$ となる。したがって16を球の体積に乗じて 9 で割れば、立方体の体積を得る。球の直径と立方体の一辺は等しいので、立方体の体積を開立方して除けば、球の直径が得られる。」

しかしながら、この方法は誤っている。何を以てそれを検証するのか。立方体の模型 8 つを、どれも一辺 1 寸とすれば、これを積んでできる立方体は一辺が 2 寸となる。これを円で刳り抜いて円柱を作れば、直径 2 寸、高さ 2 寸である。また戻して横にして同じ円で刳り抜けば、その形は「牟（ぼう）合方蓋」（四角の蓋を合わせた形）に似ており、

８個の模型は、皆な「陽馬」を丸く膨らませた形となる。案ずるに、「合蓋」は方率であり、球はその中にあって円率である。このことから考えれば、円柱を方率と為すというのは、どうして欠陥のあるものとならないであろうか。しかし、「周三径一」を円率とすれば、円の面積は少なめに誤り、円柱を方率とすれば、球の体積は多めに誤り、違いが相殺される。このため９と16の率はたまたま実際と近いものとなるが、球の方がそれでもなお多めに誤ることとなった。立方体の内側で合蓋の外側の立体を見てみるに、徐々に薄くなっている部分があるとはいえ、その多少までは窺い知ることはできず、合蓋と球は接しているものの、方形と円がたがいに入りまじり、厚薄もあやしく入り乱れているため、これを整え正すこともできなかった。間に小さい形を入れて、その意を述べたいところであるが、正しい理を失うことを懼れ、あえて疑わしい所をそのままにして、よく述べられる者を待つことにする。

黄金は、一辺１寸の立方体で重さ16両とし、金の球は直径１寸で重さ９両とする。率はここから由来するが、未だかつて検証されたことはない。だが『周官』考工記に、「栗氏は量をおさめる、金属を何度も精錬して純にすれば、滓濁は出なくなり、容量も減らなくなる。次に重量をはかり、次に水を用いて体積をはかり、さらに鋳型の容積をはかり、鋳造する」という。錬金するのを極めて精緻にして、その後で（立方体と球に）分ければ、これを率として用いることができると言っているのである。

球の直径を自乗して３で割り、開平方して除けば、球に内接する立方体の一辺となる。仮に、球に内接する立方体の一辺を５尺とすれば、５尺を「句」と為し、それを自乗すれば冪は25（平方）尺。これを２倍して50（平方）尺を得るが、これを「弦冪」とする。平面の一辺５尺の正方形の「弦」（対角線）をいうのである。この「弦」を「股」とし、また５尺を「句」として、「句」冪と「股」冪を併せて、75（平方）尺を得て、これを「大弦冪」とする。開平方してこれを除けば、「大弦」を知ることができる。「大弦」とは、すなわち内接立方体の対角線であり、これはすなわち球の直径である。したがって内接立方体の一辺の自乗の冪は、球の直径の自乗の冪の三分の一となる。「大弦」を「大弦冪」に再び乗じさせると、それは球の外接立方体の体積である。「大弦冪」は開平方しても尽きないので、その冪75について、自乗に再びかけて３乗とし、面（平方根）を与えると、外接立方体の体積は421875（６乗）尺の面（平方根）であるとわかる。また、内接立方体の一辺５尺を自乗し、さらに一辺を乗じると、体積125（立方）尺を得る。125（立方）尺を自乗して面（平方根）を用いて表すと、体積は15625（６乗）尺の面（平方根）であるとわかる。どちらも625で約すと、外接立方体の体積は675（６乗）尺の面（平方根）となり、内接立方体の体積は25（６乗）尺の面（平方根）となる。

張衡の計算では、立方体を「質」、球を「渾」という。張衡が言うには「質（立方体）と内接・外接する渾（球）に関しては、675（６乗）尺の面（平方根）は、開平方して除くには１不足するが、（１を補うと開平方できて）外渾（外接球）は26尺というのである。内渾（内接球）は25（６乗）尺の面（平方根）で、積は５尺というのである」と。今、私めは質（立方体）によって内渾（内接球）をいい、またその渾（球）には内質（内接立方体）を言ったのであるから、二つの質（立方体）の相与率は、張衡の二つの渾（球）の相与率に等しい。張衡はおそらくまた、二つの質（立方体）の相与率を先に求め、それから二つの渾（球）の相与率を推定して述べたのであろう。張衡はまた、「質（立方体）は64の面（平方根）であり、渾（球）は25の面（平方根）である」とも言う。質（立方体）から渾（球）をいうとは、内渾（内接球）が質（立方体）の$\frac{5}{8}$を占めるということである。また「正方形の面積は８の面（平方根）であり、その内接円の面積は５の面（平方根）となる」ともいう。円と渾（球）を考え合わすと、（張衡は）円柱を方率として、渾（球）を円率として、大きく誤ったことがわかる。張衡の説くところは、おのずと自身の陰陽奇偶の説に一致させようとしたもので、数の疏密を顧（かえり）みてはいない。文辞の美はあるとしても、道を乱し義を破っているのが、彼の汚点である。

外質（外接立方体）の体積、26を置いて、これに９を掛けて、16で割ると、体積$14\frac{5}{8}$立方尺を得るが、これが質（立方体）に内接する渾（球）の体積である。分母を整数部分に乗じて、分子に入れると117を得る。また内質（立方体）の体積５を置いて、分母８を乗じると、40を得る。これが渾（球）に内接する質（立方体）は渾（球）の$\frac{40}{117}$を占めるということである。しかしながら、渾（球）の率はまだ多めに誤っているものである。

仮に正方形の一辺が２尺であれば、四辺の長さは併せて８尺となる。これを「方周」という。その中に円を内接させると、円の直径もまた２尺である。円の半径を半周に乗ずれば円の面積であり、正方形の一辺の半分を方周の半分に乗ずれば正方形の面積であるから、「方周」は方冪の率であり、円周は円冪の率である。案ずるに、張衡の術のようにすると、「方周」の率は８の「面（平方根）」、円周の率は５の「面（平方根）」となる。「方周」を64尺の「面（平方根）」とすれば、円周は40尺の「面（平方根）」となる。また直径２尺を自乗すれば、直径４尺の「面（平方根）」を得るが、これが円周の率が10の「面（平方根）」に対して、直径の率が１の「面（平方根）」であるということである。張衡も「周三径一」の率を正しくないとして、このため更にこの法を著したが、結果は円周をはなはだ多く見積もって実際よりも大き過ぎるものであった。

［43］**臣淳風等謹按、祖暅之謂劉徽・張衡二人皆以圓囷爲方率、丸爲圓率、乃設新法。祖暅之開立圓術曰、「以二乘積、開立方除之、即立圓徑。其意何也。取立方棊一枚、令立樞於左後之下隅、從規去其右上之廉。又合而横規之、去其前上之廉。於是立方之棊分而爲四。規内棊一、謂之内棊。規外棊三、謂之外棊。規更合四棊、復横斷之。以句股言之、令餘高爲句、内棊斷上方爲股、本方之數、其弦也。句股之法、以句冪減弦冪、則餘爲股冪、若令餘高自乘、減本方之冪、餘即内（減）[一] 棊斷上方之冪也。本方之冪即（外）〔此〕[二] 四棊之斷上冪。然則餘高自乘、即外三棊之斷上冪矣。**
不問高卑、勢皆然也。然固有所歸同而塗殊者爾、而乃控遠以演類、借況以析微。按、陽馬方高數参等者、（列）〔倒〕[三] 而立之、横截去上、則高自乘與斷上冪數亦等焉。夫疊棊成立積、緣冪勢既同、則積不容異。
由此觀之、規之外三棊旁蹙爲一、即一陽馬也。三分立方、則陽馬居一、内棊居二可知矣。合八小方成一大方、合八内棊成一合蓋。内棊居小方三分之二、則合蓋居立方亦三分之二、較然驗矣。置三分之二、以圓冪率三乘之、如方冪率四而一、約而定之、以爲丸率。故曰、丸居立方（三）〔二〕[四] 分之一也。」
等數既密、心亦昭晰。張衡放舊、（貽）〔哈〕[五] 哂於後。劉徽循故、未暇校新。夫豈難哉。抑未之思也。依密率、此立圓積、本以圓徑再自乘、十一乘之、二十一而一、約此積。今欲求其本積、故以二十一乘之、十一而一。凡物再自乘、開立方除之、復其本數。故立方除之、即丸徑也。

校訂：［一］李潢は、「減」字は衍字であるとする。今、これに従う。
［二］郭書春云う、「「外」は「此」とすべきである。字形が互いに近いために誤った」と。今、これに従う。
［三］李潢は、「「列」は「倒」とすべきである」とする。今、これに従う。
［四］汪萊は「「三」は「二」の誤り」という。
［五］李籍『音義』に「哈哂（はいしん）」とする。今、これに従う。

訓読：臣淳風等謹んで按ずるに、祖暅之[156]謂う、「劉徽・張衡の二人、皆な円囷を以て方率と為し、丸もて円率と為す。乃ち新法を設く」。祖暅之の開立円術に曰く[157]、「『二を以て積に乗じ、開立方して之を除す、即ち立円の径[158]』。その意は何ぞや。立方の棊一枚を取り、枢を左後の下隅に立てしむ、従規しその右上の廉を去る[159]。また合して之を横規し、その前上の廉を去る[160]。是に於て立方の棊は分ちて四と為る。規せし内の棊の一を、之を内棊と謂う。規せし外の棊の三は、之を外棊と謂う[161]。規して更に四棊を合し、復た之を横断す[162]。句股を以て之を言えば、余高をして句と為さしめ、内棊の断じし上方を股と為す、本の方の数は、その弦なり[163]。句股の法、

句冪を以て弦冪を減ずれば、則ち余は股冪なり。若し余高をして自乗せしめ、本の方の冪より減ずれば、余は即ち内棊の断じし上方の冪なり[164]。本の方の冪は即ち此の四棊の断じし上の冪なり。然らば則ち余高の自乗は、即ち外三棊の断じし上の冪なり[164]。

高卑を問わず、勢は皆な然り。然れども固より帰同じくして途を殊にする所有るのみ。而して乃ち遠を控(ひ)きて以て類を演(の)べ、況を借りて以て微を析す。按ずるに、陽馬の方高数の参、等しき者、倒して之を立て、横截して上を去れば、則ち高の自乗すると断じし上の冪数とはまた等しきなり[166]。夫れ畳の棊、立積を成すに、縁冪の勢は既に同じ、則ち積は異を容れず[167]。

此に由りて之を観れば、規の外三棊の旁に蹙(ちぢ)めて一と為る、即ち一陽馬なり。立方を三分すれば、則ち陽馬は一に居り、内棊は二に居るを知る可きなり。八小方を合して一大方を成し、八内棊を合して一合蓋を成す。内棊は小方の三分の二に居れば、則ち合蓋の立方に居るもまた三分の二、較然として験あり。三分の二を置き、円冪率三を以て之に乗じ、方冪率四の如くして一とし、約して之を定め、以て丸率と為す。故に曰く、丸は立方の二分の一に居るなり」と。

等数既に密にして、心もまた昭晰なり。張衡は旧に放い、後に咍哂(はいしん)せらる[168]。劉徽は故に循い、未だ新を校するに暇あらず。夫れ豈に難からんや。抑々(そもそも)未だ之を思わざるなり。密率に依れば、この立円の積、本と円径を以て再び自乗し、十一を之に乗じ、二十一にして一とし、此の積を約す。今、其の本の積を求めんと欲す、故に二十一を以て之に乗じ、十一にして一とす。凡そ物は再び自乗し、開立方して之を除せば、その本の数に復す。故に立方之を除せば、即ち丸径なり。

注：(156) 祖暅之は祖冲之の子。冲之とともに『綴術』『大明暦』を作成した。

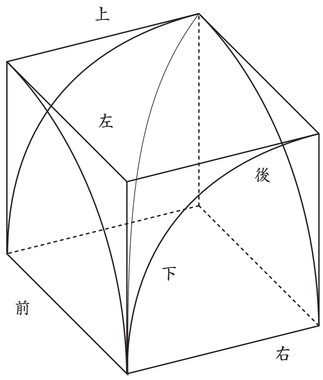
(157) ここより、「故に曰く、丸は立方の二分の一に居るなり」までは、祖暅之の開立円術の、李淳風による引用と思われる。その議論は三平方の定理とカヴァリエリの原理を用いて、立方体と合蓋の体積比 3 : 2 を正確に与えている。さらに、円周率 $\pi = 3$ の下で、立方体と球の体積比が 2 : 1 になると述べている。

(158) 円周率を 3 とすると、球の体積 V は直径 R として $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}R^3$ であるから、$R = \sqrt[3]{2V}$ となる。後文ではこの $V = \frac{1}{2}R^3$ について説明がなされている。

(159)「樞」は枢軸、扉の回転軸、とぼそ、ここでは円柱の中心軸を指す。「従規」は縦に円柱を刳り抜くこと。「廉」とは堂屋の側辺のことで、ここでは立方体の一辺

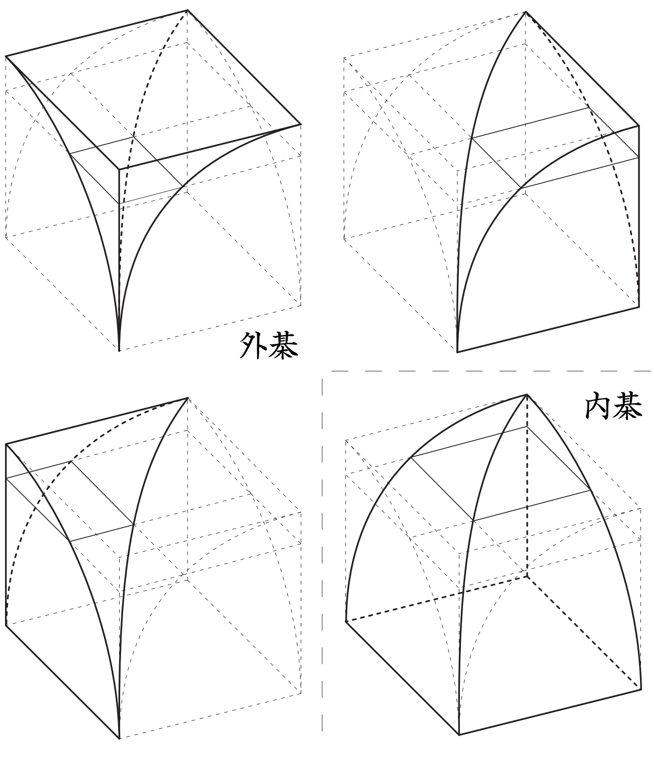
を円柱の軸に沿わせることを意味する。

(160)「右上之廉」「前上之廉」はそれぞれ刳り抜いた円柱の外側を指す。この表現から、前後上下左右を図のようにとると、「左後の下隅」は図では奥の下（点線の三叉路）になる（下図参照）。

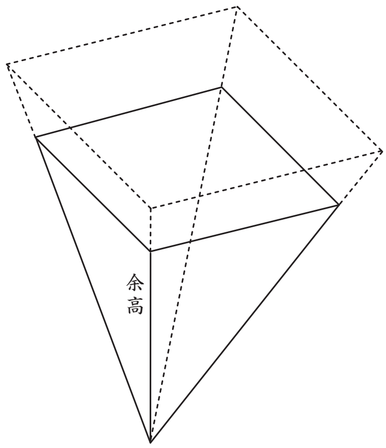


(161)「規内」と「規外」は、刳り抜いた円柱２つの内側と外側のこと。それぞれ「内棊」１つと「外棊」３つに分かれる（下図参照）。

(162)「横断」とあるが、これは縦方向を横に動かして裁断することで、ここでは水平方向に裁断すること。



(163)「余高」とは、水平に裁断して上部を取り去った、残りの部分の高さ（下図参照)。「内棊の断じし上方」とは、内棊の断面上の正方形。「本方」とは、元の立方体。



(164) 元の立方体の断面積から、余高の自乗を引いたものは、三平方の定理より、内棊の断面積に等しい。

(165)「外三棊の断じし上の冪」とは、「外三棊」の断面の面積の和のこと。前注より、外三棊の断面積の和 = 立方体の断面積 − 内棊の断面積 = 余高の自乗である。

(166)「陽馬方高數參等者」とは、底面の縦横と高さの３つが等しい陽馬のこと。これを逆さにし、水平面で切って上部を取り去れば、残った部分は元の陽馬に相似であるから、また底面（逆さにしたので上部に来ている）の縦横は高さに等しい。したがって余高の自乗は倒立陽馬の断面積に等しい。

(167)「疊棊」とは層状に積み上げられた模型を想定しての言葉であろう。カヴァリエリの原理を知っていたか、それに相当する知識があったと思われる。切断面の状況は前文で既に述べたのと同様（立方体の断面積－内棊の断面積＝余高の自乗＝倒立陽馬の断面積）であって、違いがないと述べている。

(168)「咍哂（はいしん）」は笑うこと。校訂［五］参照。

(169) 前文までで、合蓋の体積が立方体の体積の$\frac{2}{3}$であると求められた。劉徽の注にもあるように、合蓋と球の体積比は4：π であるから、古率の π = 3 に従えば、球の体積 V は直径 R として $V=\frac{2}{3}R^3\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}R^3$ となる。

（170）円周率を李淳風のいう「密率」$\frac{22}{7}$とすれば、球の体積Vは直径Rとして$V=\frac{2}{3}R^3\times\frac{\pi}{4}=\frac{11}{21}R^3$ となる。

訳：臣淳風等謹んで按じますに、祖暅之がいう、「劉徽・張衡の二人は、円柱を方率とし、球を円率として、これによって新法を設けた」と。祖暅之の開立円術にいう、「『2を（球の）体積に乗じ、開立方してこれを除くと、それは立円の直径である』。その理由は何か。立方体の模型1つを取り、回転軸を左後の下の角に立てる。縦向きに円柱を刳り抜き、その右上の廉を取り去る。またそれらを合わせて、横向きに円柱を刳り抜き、その手前上方の廉を取り出す。ここまでで立方体の模型は4つの部分に分けられている。刳り抜いた内側の模型1つを、内棊という。刳り抜いた外側の模型3つを、外棊という。刳り抜いてさらに4つの棊を合わせた後で､復たそれを水平に切り開く。句股を用いてこれを言えば、余高を句となし、内棊の断面の長辺を股とする、元の立方体の一辺は弦である。句股の法では、句冪で弦冪を減ずれば、残りは股冪である。もし余高を自乗して、元の立方体の一面の面積より減ずれば、残りは即ち内棊の断面の正方形の面積である。元の立方体の一面の面積は、即ちこの四棊の断面の面積の和であるから、したがって、余高の自乗は外三棊の断面積の和に等しい。

横断の所は高いか低いかにかかわらず、その情勢はどれもこのようである。そうであれば本来、帰するところは同じであって、過程に違いが見られるだけである。そして遠きを制御し類似を演澤し、比況（たとえ）を借りて微細を分析する。按ずるに、広・長・高の三つの長さが等しい陽馬は、これを倒立して、水平に裁断して上部を取り去れば、その（余）高の自乗と断面の面積もまた等しい。層状の模型を積み上げて立体を作るとき、断面積の状況は既に同じであるので、体積に相違はない。

このことからこれを観ると、円柱の外の3棊は旁辺に集まって1かたまりとなる、それが1つの陽馬である。立方体を3等分すれば、陽馬が占めるのはその1で、内棊が占めるのはその2であるとわかる。8個の小立方体を合わせて1つの大立方体を成し、8個の内棊を合わせて1つの合蓋を成す。内棊は小立方体の3分の2を占めるのであるから、合蓋が大立方体に占めるのもまた3分の2となり、これは明確に証験がある。3分の2を置き、円冪率3をこれに乗じ、方冪率4で割り、約してこれを確定し、丸率とする。よって、球は立方体の2分の1を占める」と。

数値はすでに精密になったので、心も明晰となる。張衡は昔の方法を踏襲し、後代の人に笑われた。劉徽は過去の方法に従って、新しい方法に改めるには時間が足りなかった。これがどうして困難なことだったろうか。そもそも深く考えていないだけ

である。密率に依れば、この球の体積とは、本来、球の直径を3乗し、11を乗じて、21で割り、この積を約す。今、その元の3乗を求めたいのであるから、21を乗じ、11で割るのである。凡そ物の数量は3乗し、それを開立方して除けば、その元々に数量に戻る。だからこの3乗を開立方して除けば、それはすなわち球の直径となるのである。

参考文献

1）李継閔『《九章算術》校証』（1993年9月）

2）郭書春『匯校九章算術』（2004年8月）

3）郭書春·劉鈍『算経十書』（1998年12月、遼寧教育出版社）、（2001年4月、九章出版社）

4）川原秀城「劉徽註九章算術」（『中国天文学・数学集』所収、1980年11月）

5）白尚恕『《九章算術》注釈』（1983年12月）

6）沈康身『九章算術導読』（1997年2月）

7）李継閔『《九章算術》及其劉徽注研究』（1992年8月）

8）李継閔『《九章算術》導読与訳注』（1998年9月）

9）李籍『九章算術音義』（叢書集成初編本『九章算術』所収）

10）「九章算術補註」（李儼『中算史論叢』（三）、1935年12月）

11）楊輝『詳解九章算法』（百部叢書集成本）

12）李潢『九章算術細草図説』（嘉慶庚辰版本）

13）清水達雄『九章算術』1～15（「数学セミナー」1975年2月号～1976年4月号）

14）張家山漢簡『算数書』研究会編『漢簡『算数書』－中国最古の数学書－』（朋友書店、2006年10月）

15）Shen, Kang-Shen, Crossley, John N., Lun, Anthony W. C.『The Nine Chapters on the Mathematical Art : Companion and Commentary』（Oxford Univ. Press, 1999）

16）大川俊隆『九章算術』訳注稿（1）大阪産業大学論集　人文·社会科学編2号（2008年2月）

17）大川俊隆『九章算術』訳注稿（2）大阪産業大学論集　人文·社会科学編3号（2008年6月）

18）Chemla, Karine; Guo, Shuchun『Les neuf chapîtres, Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires』（Dunod, 2004）

19）大川俊隆『九章算術』訳注稿（3）大阪産業大学論集　人文·社会科学編4号（2008年10月）

20）大川俊隆『九章算術』訳注稿（4）大阪産業大学論集　人文·社会科学編5号（2009年2月）

21）馬場理恵子『九章算術』訳注稿（5）大阪産業大学論集　人文・社会科学編6号（2009

年６月）
22) 馬場理恵子『九章算術』訳注稿 (6) 大阪産業大学論集　人文・社会科学編７号 (2009年10月）
23) 銭宝琮点校『九章算術点校』(1991年、九章出版社）
24) 角谷常子、張替俊夫『九章算術』訳注稿 (7)　人文・社会科学編８号 (2010年２月）
25) 汪莱撰『校正九章算術及戴氏訂訛』衡齋遺書 (1892年刻本）
26) 角谷常子、張替俊夫『九章算術』訳注稿 (8)　人文・社会科学編９号 (2010年６月）
27) 田村誠、張替俊夫「新たに出現した二つの古算書―『数』と『算術』」 人文・社会科学編９号 (2010年６月）
28) 郭書春『九章算術訳注』(2009年12月、上海古籍出版社）
29) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿 (9)　人文・社会科学編10号 (2010年10月）
30) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿 (10)　人文・社会科学編11号 (2011年２月）
31) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿 (11)　人文・社会科学編12号 (2011年６月）